

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [15] Escreva a equação $r = \frac{5}{\sin(\theta) - 2 \cos(\theta)}$ em coordenadas cartesianas e simplifique.

Sabemos que a relação entre as coordenadas é

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \quad \sin(\theta) = \frac{y}{r} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Portanto, precisamos substituir as expressões e simplificar o resultado

$$r = \frac{5}{\sin(\theta) - 2 \cos(\theta)}$$

$$r (\sin(\theta) - 2 \cos(\theta)) = 5$$

$$r \left(\frac{y}{r} - 2 \frac{x}{r} \right) = 5$$

$$r \frac{y - 2x}{r} = 5$$

$$y - 2x = 5$$

$$y = 2x + 5$$

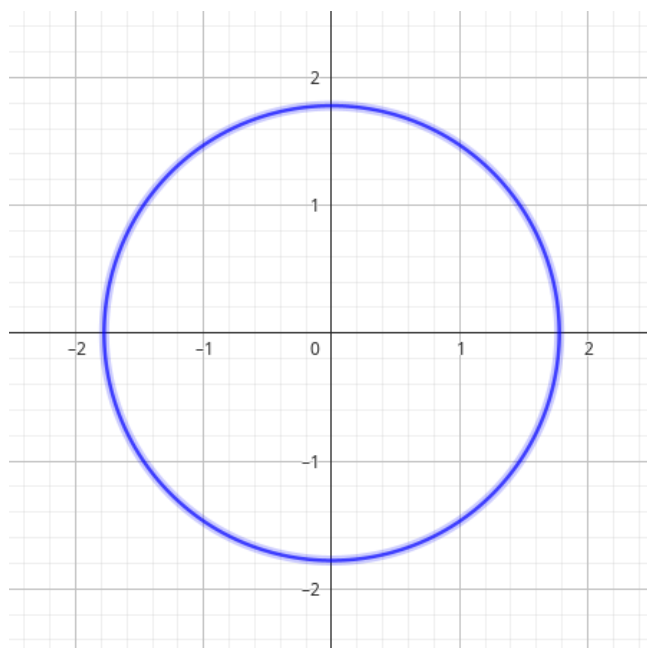
2 [10] Encontre e corte da quádrlica $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$ pelo plano $z = 0$, identifique a região e a esboce no plano.

Encontramos o corte substituindo $z = 0$ na equação

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$$

$$x^2 + y^2 = 10$$

Essa é a expressão da **circunferência**, centrada na origem com raio $\sqrt{10}$, ilustrada a seguir



3 [15] Encontre e esboce duas curvas de nível da função $f(x, y) = e^{xy}$

As curvas de nível da função são regiões onde o valor da função é constante, ou seja, soluções das equações

$$f(x, y) = c$$

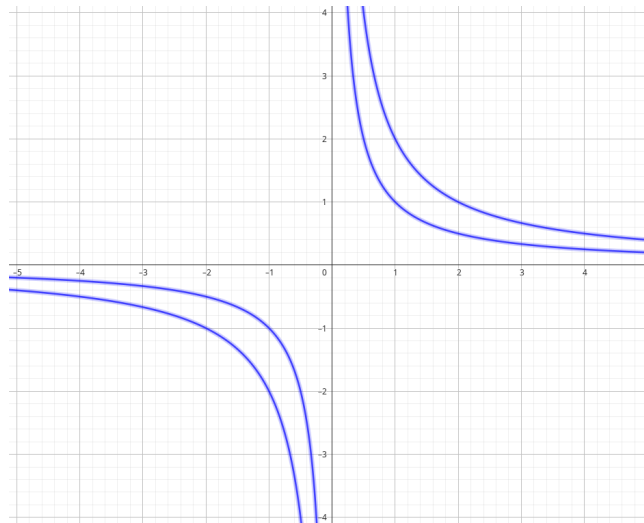
$$e^{xy} = c$$

$$xy = \ln(c)$$

$$y = \frac{\ln(c)}{x}$$

Note que c precisa ser positiva para existir solução e, portanto, curva de nível. Escolhemos os valores $c = e$ e $c = e^2$ para obter as curvas

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad y = \frac{2}{x}$$



4 [30] Calcule os limites solicitados, ou prove que o limite não existe

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,3)} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x - y - 1}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{x + y}$

a) Se tentarmos calcular diretamente a fração obtemos uma indeterminação $0/0$. Portanto, precisamos remover a indeterminação manipulando algebricamente a função, assumindo que $(x, y) \neq (4, 3)$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x - y - 1} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x - y - 1} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{y+1}} \\ &= \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y+1})^2}{(x - y - 1)(\sqrt{x} + \sqrt{y+1})} \\ &= \frac{x - (y+1)}{(x - y - 1)(\sqrt{x} + \sqrt{y+1})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y+1}} \end{aligned}$$

Onde o cancelamento só foi possível pois $(x, y) \neq (4, 3)$. Agora podemos calcular o limite, pois temos uma função contínua em $(4, 3)$,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{(x,y) \rightarrow (4,3)} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x - y - 1} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (4,3)} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3+1}} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

b) Analisando a função percebemos que se fizermos $y = x$ o limite restrito a curva será

$$L_1 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x - y}{x + y} \Big|_{y=x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{2x} = 0$$

Por outro lado, escolhendo $y = 2x$ temos

$$L_2 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x - y}{x + y} \Big|_{y=2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{3x} = \frac{-1}{3}$$

Como $L_1 \neq L_2$ o limite não existe.

5 [30] Calcule as derivadas solicitadas realizando as contas na ordem indicada

a) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\cos \left(\frac{2x}{5y} \right) \right)^2$ b) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln (x^2 + y^2)$

a)
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\cos \left(\frac{2x}{5y} \right) \right)^2 &= 2 \cos \left(\frac{2x}{5y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\cos \left(\frac{2x}{5y} \right) \right) \\ &= 2 \cos \left(\frac{2x}{5y} \right) (-1) \operatorname{sen} \left(\frac{2x}{5y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x}{5y} \right) \\ &= -2 \cos \left(\frac{2x}{5y} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2x}{5y} \right) \frac{2x}{5} \frac{\partial y^{-1}}{\partial y} \\ &= -\frac{4x}{5} \cos \left(\frac{2x}{5y} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2x}{5y} \right) \frac{\partial y^{-1}}{\partial y} \\ &= -\frac{4x}{5} \cos \left(\frac{2x}{5y} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2x}{5y} \right) (-1)y^{-2} \\ &= \frac{4x}{5y^2} \cos \left(\frac{2x}{5y} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2x}{5y} \right) \end{aligned}$$

b) Começamos calculando a primeira derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \ln (x^2 + y^2) &= \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} \left(0 + \frac{\partial y^2}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} 2y \\ &= \frac{2y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Agora calculamos a derivada segunda

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln (x^2 + y^2) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln (x^2 + y^2) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= 2y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1} \\ &= 2y(-1) (x^2 + y^2)^{-2} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) \\ &= -2y \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} (2x + 0) \\ &= \frac{-4yx}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$