CFVVI – Prova 3 – Turma 1 09/09/2024

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [50] Encontre o ponto da superfície $z = xy + 1$ que está mais próximo da origem.

Queremos minimizar a distância

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Como a função raiz quadrada é crescente podemos minimizar a função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

suas derivadas parciais são

$$f_x(x, y, z) = 2x \qquad f_y(x, y, z) = 2y \qquad f_z(x, y, z) = 2z$$

As derivadas parciais da função $g(x, y, z) = z - xy$ são

$$g_x(x, y, z) = -y \qquad g_y(x, y, z) = -x \qquad g_z(x, y, z) = 1$$

Aplicando os Multiplicadores de Lagrange, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x = -\lambda y \\ 2y = -\lambda x \\ 2z = \lambda \\ z - xy = 1 \end{cases}$$

Isolamos x na primeira equação e substituimos na segunda

$$x = \frac{-\lambda y}{2}$$

$$y = \frac{-\lambda}{2} x = \frac{-\lambda}{2} \frac{-\lambda y}{2} = \frac{\lambda^2}{4} y$$

Temos $y = 0$ ou

$$\frac{\lambda^2}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2$$

Se $y = 0$ a quarta equação se reduz a $z = 1$, pela terceira $\lambda = 2$ e

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2 \times 0}{2} = 0$$

Obtemos o ponto $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 1)$

Se $\lambda = 2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2y}{2} = -y$$

$$2z = \lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad z = 1$$

Substituindo na quarta equação

$$\begin{aligned} z - xy &= 1 \\ 1 - (-y)y &= 1 \\ y^2 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Obtemos novamente o ponto $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 1)$

Se $\lambda = -2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-(-2)y}{2} = y$$

$$2z = \lambda = -2 \quad \Rightarrow \quad z = -1$$

Substituindo na quarta equação

$$\begin{aligned} z - xy &= 1 \\ -1 - y^2 &= 1 \\ -y^2 &= 2 \\ y^2 &= -2 \end{aligned}$$

Não existe solução real.
O ponto mais próximo da origem é $(0, 0, 1)$.

2 [25] Dado $z = \left(\sqrt{3}+i\right)^4$, calcule

a) a parte real de z,

b) a parte imaginária de z,

c) o módulo de z,

d) o argumento de z

Convertendo $u = \sqrt{3}+i$ para a forma polar

$$\rho = |u| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\operatorname{sen}(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(u)}{|u|} = \frac{1}{2} \qquad \cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(u)}{|u|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \varphi = \arg(u) = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

Assim

$$u = \rho\left[\cos(\varphi) + i \operatorname{sen}(\varphi)\right] = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Portanto

$$\begin{aligned}
z &= u^3 \\
&= \rho^4\left[\cos(4\varphi) + i \operatorname{sen}(4\varphi)\right] \\
&= 2^4\left[\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{6}\right)\right] \\
&= 16\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\
&= 16\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\
&= -8 + 8\sqrt{3}i
\end{aligned}$$

Parte real de z

$$\operatorname{Re}(z) = -8$$

Parte imaginária de z

$$\operatorname{Im}(z) = 8\sqrt{3}$$

Módulo de z

$$|z| = 16$$

Argumento de z

$$\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$$

3 [25] Encontre as raízes cúbicas complexas do número $z = 27i$.

Escrevemos $z = 27i$ na forma trigonométrica

$$z = 27\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

As raízes cúbicas são

$$u_k = \sqrt[3]{27}\left[\cos\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)\right] \qquad k = 0, 1, 2$$

$$= 3\left[\cos\left(\frac{\pi + 4k\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 4k\pi}{6}\right)\right]$$

Para cada valor de k

$$u_0 = 3\left[\cos\left(\frac{\pi + 4\times 0\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 4\times 0\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 3\left[\cos(30^\circ) + i\,\mathrm{sen}(30^\circ)\right]$$

$$= 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$u_1 = 3\left[\cos\left(\frac{\pi + 4\times 1\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 4\times 1\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 3\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 3\left[\cos(150^\circ) + i\,\mathrm{sen}(150^\circ)\right]$$

$$= 3\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right]$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$u_2 = 3\left[\cos\left(\frac{\pi + 4\times 2\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 4\times 2\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 3\left[\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 3\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 3\left[\cos(270^\circ) + i\,\mathrm{sen}(270^\circ)\right]$$

$$= 3\left[0 + i(-1)\right] = -3i$$