

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

- 1 [25] Encontre uma parametrização para o movimento de uma partícula que começa no ponto $(-2, 0)$ e traça a metade superior do círculo $x^2 + y^2 = 4$

Metade superior do círculo de raio 2 centrado na origem

Parametrização do círculo unitário centrado na origem

$$x = \cos(\theta)$$

$$y = \sin(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Parametrização do círculo de raio 2 centrado na origem

$$x = 2 \cos(\theta)$$

$$y = 2 \sin(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Parametrização da metade superior

$$x = 2 \cos(\theta)$$

$$y = 2 \sin(\theta)$$

$$\theta \in [0, \pi]$$

Essa parametrização começa em $(2, 0)$ e termina em $(-2, 0)$. Queremos inverter o sentido em que percorremos a trajetória

$$x = 2 \cos(\pi - \theta) = -2 \cos(\theta)$$

$$y = 2 \sin(\pi - \theta) = 2 \sin(\theta)$$

$$\theta \in [0, \pi)$$

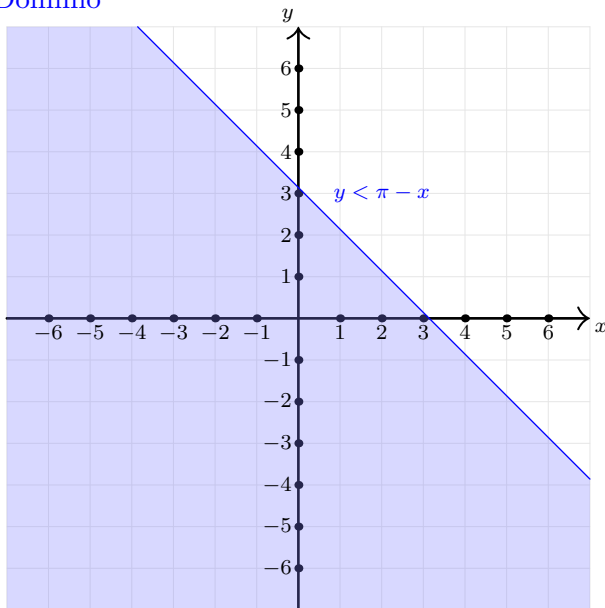
2 [25] Considerando a função $f(x, y) = \ln(\pi - x - y)$

(a) [10] Determine o domínio de f e represente-o graficamente

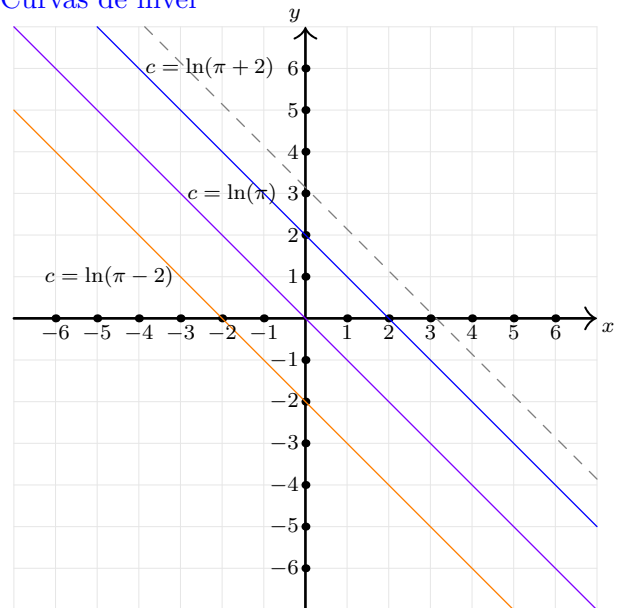
(b) [5] Encontre a imagem de f

(c) [10] Caracterize todas as curvas de nível de f e esboce três delas

Domínio



Curvas de nível



(a) O domínio de f é o conjunto de pontos (x, y) tais que

$$\pi - x - y > 0$$

$$y < \pi - x$$

Portanto

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < \pi - x\}$$

(b) A imagem de f é o conjunto de valores que f pode assumir. Como $y < \pi - x$ assume valores no intervalo $(0, \infty)$ a imagem de f é $\text{Im}(f) = (-\infty, \infty)$

(c) As curvas de nível são dadas por

$$\ln(\pi - x - y) = c \quad \text{para } c \in \mathbb{R}$$

$$\pi - x - y = e^c$$

$$y = \pi - e^c - x$$

isto é, retas com coeficiente angular -1 e intercepto $b = \pi - e^c$

$$b = -2$$

$$c = \ln(\pi - (-2)) = \ln(\pi + 2)$$

$$y = -2 - x$$

$$b = 0$$

$$c = \ln(\pi)$$

$$y = -x$$

$$b = 2$$

$$c = \ln(\pi - 2)$$

$$y = 2 - x$$

3 [30] Calcule o limite ou mostre que ele não existe

(a) [15] $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$

(b) [15] $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,3)} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x - y - 1}$

(a) Testando diferentes caminhos

Caminho $x = y^2$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \Big|_{x=y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 y^2}{y^4 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{2y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Caminho $x = 0$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \Big|_{x=0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \times y^2}{0 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Como os limites são diferentes, o limite **não existe**

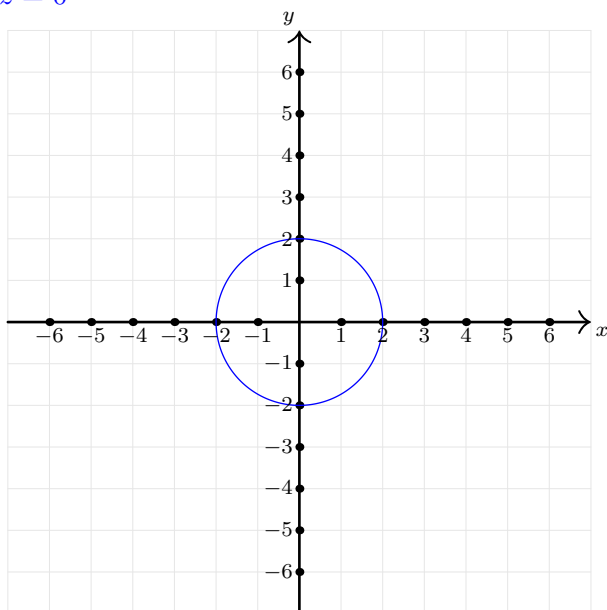
(b) Multiplicando pelo conjugado

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x - y - 1} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x - y - 1} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{y+1}} \\ &= \frac{x - (y+1)}{(x - y - 1)(\sqrt{x} + \sqrt{y+1})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y+1}} \end{aligned}$$

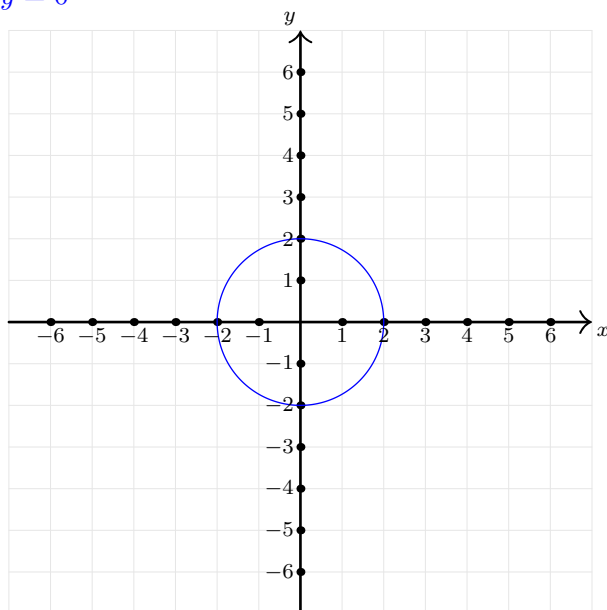
$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (4,3)} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x - y - 1} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (4,3)} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3+1}} \\ &= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

4 [20] Encontre e esboce as curvas que representam o corte da superfície $x^2 + y^2 = 4 - z^2$ pelos planos $z = 0$ e $y = 0$

$z = 0$



$y = 0$



No plano $z = 0$ a equação $x^2 + y^2 = 4 - z^2$ se reduz a

$$x^2 + y^2 = 4 - 0$$

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

que corresponde circunferência de raio 2 centrada na origem

No plano $y = 0$ a equação $x^2 + y^2 = 4 - z^2$ se reduz a

$$x^2 + 0 = 4 - z^2$$

$$x^2 + z^2 = 2^2$$

que corresponde circunferência de raio 2 centrada na origem