

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [25] Considerando que a equação $xe^y + ye^z + 2\ln(x) - 2 - 3\ln(2) = 0$ define z como função de x e y .

- a) Calcule as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$
- b) Encontre os valores de $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em $(1, \ln(2), \ln(3))$
- c) Construa a aproximação linear da função $z(x, y)$ no ponto $(1, \ln(2))$

a) Considerando $z = z(x, y)$ e derivando por x os dois lados da equação temos

$$xe^y + ye^{z(x,y)} + 2\ln(x) = 2 + 3\ln(2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [xe^y + ye^{z(x,y)} + 2\ln(x)] = \frac{\partial}{\partial x} [2 + 3\ln(2)]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (xe^y) + \frac{\partial}{\partial x} (ye^{z(x,y)}) + \frac{\partial}{\partial x} (2\ln(x)) = 0$$

$$e^y + ye^{z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{2}{x} = 0$$

$$ye^{z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial x} = -e^y - \frac{2}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-1}{ye^{z(x,y)}} \left(e^y + \frac{2}{x} \right)$$

Derivando por y os dois lados da equação temos

$$xe^y + ye^{z(x,y)} + 2\ln(x) = 2 + 3\ln(2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [xe^y + ye^{z(x,y)} + 2\ln(x)] = \frac{\partial}{\partial y} [2 + 3\ln(2)]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (xe^y) + \frac{\partial}{\partial y} (ye^{z(x,y)}) + \frac{\partial}{\partial y} (2\ln(x)) = 0$$

$$x \frac{\partial e^y}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial y} e^{z(x,y)} + y \frac{\partial}{\partial y} e^{z(x,y)} + 0 = 0$$

$$xe^y + e^{z(x,y)} + ye^{z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$ye^{z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial y} = -xe^y - e^{z(x,y)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xe^y + e^{z(x,y)}}{ye^{z(x,y)}}$$

b) Avaliando as derivadas no ponto $(1, \ln(2), \ln(3))$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, \ln(2)) = \left(\frac{-1}{ye^z} \left(e^y + \frac{2}{x} \right) \right) \Big|_{(1, \ln(2), \ln(3))}$$

$$= \frac{-1}{\ln(2)e^{\ln(3)}} \left(e^{\ln(2)} + \frac{2}{1} \right)$$

$$= \frac{-1}{3 \ln(2)} (2 + 2)$$

$$= \frac{-4}{3 \ln(2)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1, \ln(2)) = \left(-\frac{xe^y + e^{z(x,y)}}{ye^{z(x,y)}} \right) \Big|_{(1, \ln(2), \ln(3))}$$

$$= -\frac{1e^{\ln(2)} + e^{\ln(3)}}{\ln(2)e^{\ln(3)}}$$

$$= -\frac{2+3}{\ln(2)3}$$

$$= \frac{-5}{3 \ln(2)}$$

c) A aproximação linear da função $z(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0) = (1, \ln(2))$ é

$$L(x, y) = z(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$= z(1, \ln(2)) + (x - 1) \frac{\partial z}{\partial x}(1, \ln(2)) + (y - \ln(2)) \frac{\partial z}{\partial y}(1, \ln(2))$$

$$= \ln(3) + (x - 1) \frac{-4}{3 \ln(2)} + (y - \ln(2)) \frac{-5}{3 \ln(2)}$$

$$= \ln(3) - \frac{4}{3 \ln(2)}(x - 1) - \frac{5}{3 \ln(2)}(y - \ln(2))$$

Não faz parte da resolução solicitada na prova, mas com o uso de uma calculadora podemos avaliar

essa expressão, obtendo uma aproximação para $z(x, y)$ quando $(x, y) \approx (1, 0.69)$

$$z(x, y) \approx L(x, y)$$

$$= \ln(3) + \frac{4}{3 \ln(2)} + \frac{5}{3} - \frac{4}{3 \ln(2)}x - \frac{5}{3 \ln(2)}y$$

$$\approx 4,689 - 1,924x - 2,404y$$

2 [25] Encontre os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ restrita a região fechada limitada $x^2 + 2y^2 \leq 16$

Como a função é contínua e a região é fechada e limitada sabemos que f assume um valor máximo e um valor mínimo na região.

Temos que buscar os pontos críticos no interior e aplicar multiplicadores de Lagrange na fronteira.

Gradiente de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2x^2 + y^2) = 4x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2x^2 + y^2) = 2y$$

Pontos críticos: Impondo $\nabla f = 0$ temos o ponto interior

$$P_1 = (0, 0)$$

Multiplicadores de Lagrange: Temos a restrição $g(x, y) = x^2 + 2y^2 \leq 16$ e seu gradiente é

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 2y^2) = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + 2y^2) = 4y$$

Precisamos resolver o sistema

$$4x = 2\lambda x$$

$$2y = 4\lambda y$$

$$x^2 + 2y^2 = 16$$

Que pode ser simplificado

$$2x = \lambda x$$

$$y = 2\lambda y$$

$$x^2 + 2y^2 = 16$$

Da primeira equação temos que $x = 0$ ou $\lambda = 2$. Se $x = 0$ a terceira equação se reduz a

$$x^2 + 2y^2 = 16$$

$$2y^2 = 16$$

$$y^2 = 8$$

$$y = \pm 2\sqrt{2}$$

Substituindo qualquer uma delas na segunda equação temos $\lambda = 0$. Encontramos o segundo e terceiro pontos

$$P_2 = (0, -2\sqrt{2}) \quad P_3 = (0, 2\sqrt{2})$$

Se $\lambda = 2$ a segunda equação se torna $y = 8y$ e, portanto, $y = 0$. Substituindo na terceira equação temos $x^2 = 16$, cujas soluções são $x = -4$ ou $x = 4$. Encontramos o quarto e quinto pontos

$$P_4 = (-4, 0) \quad P_5 = (4, 0)$$

Avaliando a função nos pontos encontrados

$$f(0, 0) = 2 \times 0^2 + 0^2 = 0$$

$$f(0, -2\sqrt{2}) = 2 \times 0^2 + (-2\sqrt{2})^2 = 8$$

$$f(0, 2\sqrt{2}) = 2 \times 0^2 + (2\sqrt{2})^2 = 8$$

$$f(-4, 0) = 2 \times (-4)^2 + 0^2 = 32$$

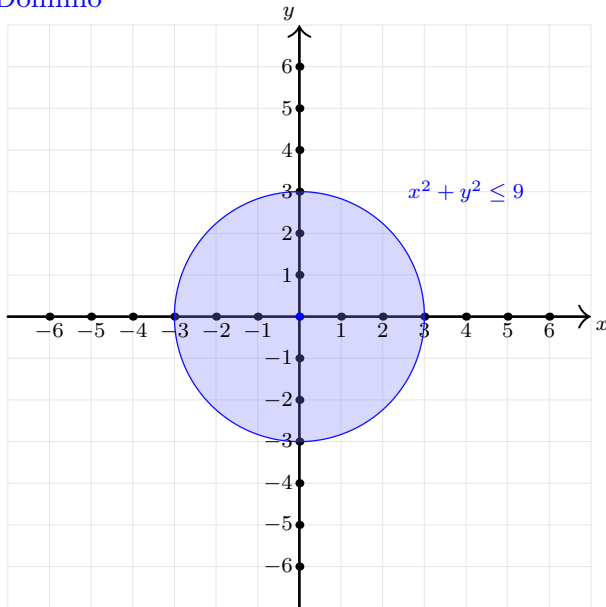
$$f(4, 0) = 2 \times 4^2 + 0^2 = 32$$

O valor mínimo de f é 0 e o valor máximo é 32

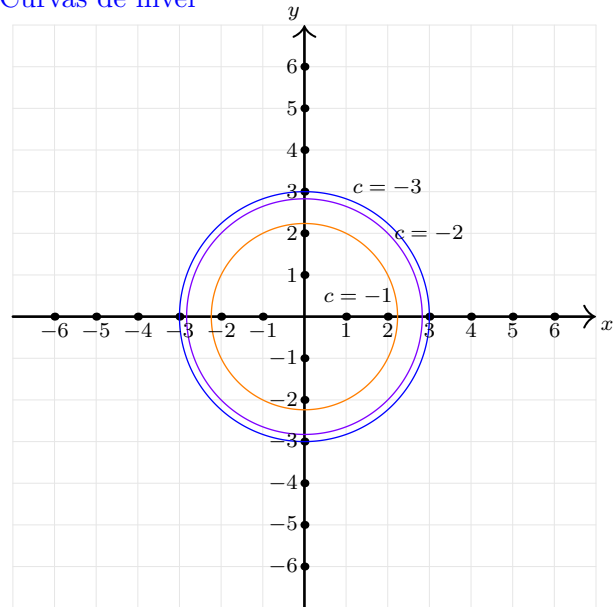
3 [25] Considerando a função $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} - 3$

- Determine e esboce o domínio de f
- Determine as curvas de nível de f e esboce três delas
- Calcule o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ ou mostre que ele não existe

Domínio



Curvas de nível



a) O domínio de f consiste dos pontos onde é possível avaliar a raiz quadrada, isto é, os pontos que satisfazem $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} 9 - x^2 - y^2 &\geq 0 \\ -x^2 - y^2 &\geq -9 \\ x^2 + y^2 &\leq 9 = 3^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\},$$

que corresponde a um disco de raio 3, centrado na origem.

b) As curvas de nível de f são compostas pelos pontos onde $f(x, y) = c$ para alguma constante c na imagem de f .

Para determinar a imagem de f observamos que $x^2 + y^2$ só pode assumir valores no intervalo $[0, 9]$. Portanto, $9 - x^2 - y^2$ está limitado ao mesmo intervalo. Consequentemente

$\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ está em $[0, 3]$. Concluimos que os valores de f estão em $[-3, 0]$, isto é, $\text{Im}(f) = [-3, 0]$

Para qualquer $c \in \text{Im}(f) = [-3, 0]$, temos a curva de nível

$$\begin{aligned} f(x, y) &= c \\ \sqrt{9 - x^2 - y^2} - 3 &= c \\ \sqrt{9 - x^2 - y^2} &= c + 3 \\ 9 - x^2 - y^2 &= (c + 3)^2 \\ -x^2 - y^2 &= (c + 3)^2 - 9 \\ x^2 + y^2 &= 9 - (c + 3)^2 \end{aligned}$$

Que corresponde a uma circunferência centrada na origem de raio

$$r = \sqrt{9 - (c + 3)^2}$$

Escolhendo os valores $c = -3$, $c = -2$ e $c = -1$,

temos as curvas de nível

$$\gamma_1: x^2 + y^2 = 9 - (-3 + 3)^2 = 9 - 0 = 9$$

$$\gamma_2: x^2 + y^2 = 9 - (-2 + 3)^2 = 9 - 1 = 8$$

$$\gamma_3: x^2 + y^2 = 9 - (-1 + 3)^2 = 9 - 4 = 5$$

c) Calculando o limite

$$\begin{aligned} L &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2} - 3}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2} - 3}{x^2 + y^2} \times \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2} + 3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2} + 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\left(\sqrt{9 - x^2 - y^2}\right)^2 - 3^2}{(x^2 + y^2) \left(\sqrt{9 - x^2 - y^2} + 3\right)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{9 - x^2 - y^2 - 9}{(x^2 + y^2) \left(\sqrt{9 - x^2 - y^2} + 3\right)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2) \left(\sqrt{9 - x^2 - y^2} + 3\right)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2} + 3} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{9 - 0^2 - 0^2} + 3} \\ &= \frac{-1}{3 + 3} = \frac{-1}{6} \end{aligned}$$

4 [25] Dado $z = (\sqrt{3} + i)^4$, calcule

- a) a parte real de z ,
- b) a parte imaginária de z ,
- c) o módulo de z ,
- d) o argumento de z

Convertendo $u = \sqrt{3} + i$ para a forma polar

$$\rho = |u| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{sen}(\varphi) = \frac{\text{Im}(u)}{|u|} = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos}(\varphi) = \frac{\text{Re}(u)}{|u|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi = \arg(u) = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

Assim

$$\begin{aligned} u &= \rho [\cos(\varphi) + i \text{sen}(\varphi)] \\ &= 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} z &= u^3 \\ &= \rho^4 [\cos(4\varphi) + i \text{sen}(4\varphi)] \\ &= 2^4 \left[\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) + i \text{sen}\left(\frac{4\pi}{6}\right) \right] \end{aligned}$$

$$= 16 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$= 16 \left[-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$= -8 + 8\sqrt{3}i$$

Parte real de z

$$\text{Re}(z) = -8$$

Parte imaginária de z

$$\text{Im}(z) = 8\sqrt{3}$$

Módulo de z

$$|z| = 16$$

Argumento de z

$$\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$$