

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [25] Considerando que a equação $\sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(x + z) = 0$ define z como função de x e y .

- a) Calcule as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$
- b) Encontre os valores de $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em (π, π, π)
- c) Construa a aproximação linear da função $z(x, y)$ no ponto (π, π)

a) Considerando $z = z(x, y)$ e derivando por x os dois lados da equação temos

$$\begin{aligned}
 \sin(x + y) + \sin(y + z(x, y)) + \sin(x + z(x, y)) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial x} (\sin(x + y) + \sin(y + z(x, y)) + \sin(x + z(x, y))) &= 0 \\
 \cos(x + y) \frac{\partial}{\partial x} (x + y) + \cos(y + z(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} (y + z(x, y)) + \cos(x + z(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} (x + z(x, y)) &= 0 \\
 \cos(x + y) + \cos(y + z(x, y)) \frac{\partial z}{\partial x} + \cos(x + z(x, y)) \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) &= 0 \\
 \cos(x + y) + \cos(y + z(x, y)) \frac{\partial z}{\partial x} + \cos(x + z(x, y)) + \cos(x + z(x, y)) \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\
 (\cos(y + z(x, y)) + \cos(x + z(x, y))) \frac{\partial z}{\partial x} &= -\cos(x + y) - \cos(x + z(x, y)) \\
 \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\cos(x + y) + \cos(x + z(x, y))}{\cos(y + z(x, y)) + \cos(x + z(x, y))}
 \end{aligned}$$

Derivando por y os dois lados da equação temos

$$\begin{aligned}
& \sin(x+y) + \sin(y+z(x,y)) + \sin(x+z(x,y)) = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial y} (\sin(x+y) + \sin(y+z(x,y)) + \sin(x+z(x,y))) = 0 \\
& \cos(x+y) \frac{\partial}{\partial y} (x+y) + \cos(y+z(x,y)) \frac{\partial}{\partial y} (y+z(x,y)) + \cos(x+z(x,y)) \frac{\partial}{\partial y} (x+z(x,y)) = 0 \\
& \cos(x+y) + \cos(y+z(x,y)) \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \cos(x+z(x,y)) \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\
& \cos(x+y) + \cos(y+z(x,y)) + \cos(y+z(x,y)) \frac{\partial z}{\partial y} + \cos(x+z(x,y)) \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\
& (\cos(y+z(x,y)) + \cos(x+z(x,y))) \frac{\partial z}{\partial y} = -\cos(x+y) - \cos(y+z(x,y)) \\
& \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos(x+y) + \cos(y+z(x,y))}{\cos(y+z(x,y)) + \cos(x+z(x,y))}
\end{aligned}$$

b) Avaliando as derivadas no ponto (π, π, π)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}(\pi, \pi) &= \left(-\frac{\cos(x+y) + \cos(x+z)}{\cos(y+z) + \cos(x+z)} \right) \Big|_{(\pi, \pi, \pi)} \\
&= -\frac{\cos(\pi + \pi) + \cos(\pi + \pi)}{\cos(\pi + \pi) + \cos(\pi + \pi)} \\
&= -\frac{2 \cos(2\pi)}{2 \cos(2\pi)} \\
&= -\frac{2 \times 1}{2 \times 1} = -1 \\
\frac{\partial z}{\partial y}(\pi, \pi) &= \left(-\frac{\cos(x+y) + \cos(y+z)}{\cos(y+z) + \cos(x+z)} \right) \Big|_{(\pi, \pi, \pi)} \\
&= -\frac{\cos(\pi + \pi) + \cos(\pi + \pi)}{\cos(\pi + \pi) + \cos(\pi + \pi)} \\
&= -\frac{2 \cos(2\pi)}{2 \cos(2\pi)} \\
&= -\frac{2 \times 1}{2 \times 1} = -1
\end{aligned}$$

c) A aproximação linear da função $z(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0) = (\pi, \pi)$ é

$$\begin{aligned}
L(x, y) &= z(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \\
&= z(\pi, \pi) + (x - \pi) \frac{\partial z}{\partial x}(\pi, \pi) + (y - \pi) \frac{\partial z}{\partial y}(\pi, \pi) \\
&= \pi - (x - \pi) - (y - \pi) \\
&= \pi - x + \pi - y + \pi \\
&= 3\pi - x - y
\end{aligned}$$

2 [25] Encontre os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ restrita a região fechada limitada $x^2 + y^2 \leq 9$

Como a função é contínua e a região é fechada e limitada sabemos que f assume um valor máximo e um valor mínimo na região.

Temos que buscar os pontos críticos no interior e aplicar multiplicadores de Lagrange na fronteira.

Gradiente de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 4y^2) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + 4y^2) = 8y$$

Pontos críticos: Impondo $\nabla f = 0$ temos o ponto interior

$$P_1 = (0, 0)$$

Multiplicadores de Lagrange: Temos a restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 9$ e seu gradiente é

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) = 2y$$

Precisamos resolver o sistema

$$2x = 2\lambda x$$

$$8y = 2\lambda y$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

Que pode ser simplificado

$$x = \lambda x$$

$$4y = \lambda y$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

Da primeira equação temos que $x = 0$ ou $\lambda = 1$. Se $x = 0$ a terceira equação se reduz a $y^2 = 9$, cujas soluções são $y = 3$ ou $y = -3$. Substituindo qualquer uma delas na segunda equação temos $\lambda = 0$. Encontramos o segundo e terceiro pontos

$$P_2 = (0, -3) \quad P_3 = (0, 3)$$

Se $\lambda = 1$ a segunda equação se torna $4y = y$ e, portanto, $y = 0$. Substituindo na terceira equação temos $x^2 = 9$, cujas soluções são $x = -3$ ou $x = 3$. Encontramos o quarto e quinto pontos

$$P_4 = (-3, 0) \quad P_5 = (3, 0)$$

Avaliando a função nos pontos encontrados

$$f(0, 0) = 0^2 + 4 \times 0^2 = 0$$

$$f(0, -3) = 0^2 + 4 \times (-3)^2 = 36$$

$$f(0, 3) = 0^2 + 4 \times 3^2 = 36$$

$$f(-3, 0) = (-3)^2 + 4 \times 0^2 = 9$$

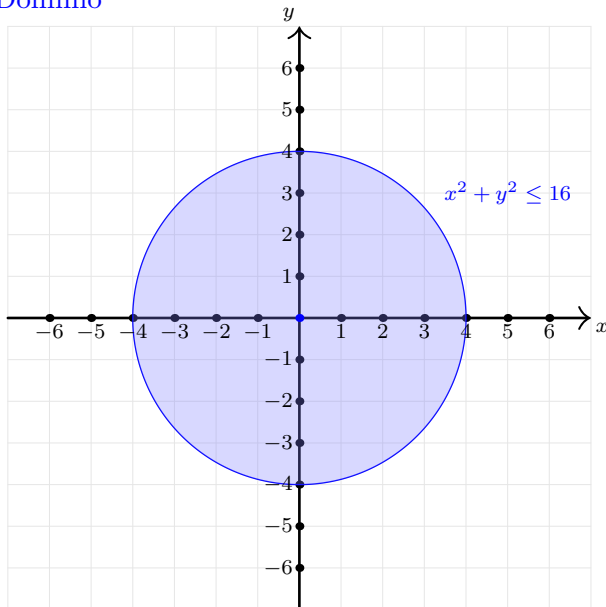
$$f(3, 0) = 3^2 + 4 \times 0^2 = 9$$

O valor mínimo de f é 0 e o valor máximo é 36

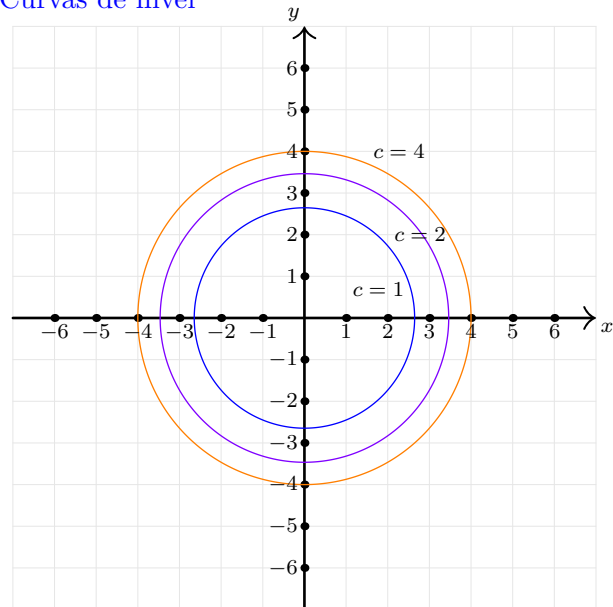
3 [25] Considerando a função $f(x, y) = 4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

- Determine e esboce o domínio de f
- Caracterize todas as curvas de nível de f e esboce três delas
- Calcule o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{f(x, y)}$ ou mostre que ele não existe

Domínio



Curvas de nível



a) O domínio de f consiste dos pontos onde é possível avaliar a raiz quadrada, isto é, os pontos que satisfazem $16 - x^2 - y^2 \geq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} 16 - x^2 - y^2 &\geq 0 \\ -x^2 - y^2 &\geq -16 \\ x^2 + y^2 &\leq 16 = 4^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\},$$

que corresponde a um disco de raio 4, centrado na origem.

b) As curvas de nível de f são compostas pelos pontos onde $f(x, y) = c$ para alguma constante c na imagem de f .

Para determinar a imagem de f observamos que $x^2 + y^2$ só pode assumir valores no intervalo $[0, 16]$. Portanto, $16 - x^2 - y^2$ está limitado ao mesmo intervalo. Consequentemente $\sqrt{16 - x^2 - y^2}$ está

em $[0, 4]$. Concluímos que os valores de f estão em $[0, 4]$, isto é, $\text{Im}(f) = [0, 4]$

Para qualquer $c \in \text{Im}(f) = [0, 4]$, temos a curva de nível

$$\begin{aligned} f(x, y) &= c \\ 4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2} &= c \\ \sqrt{16 - x^2 - y^2} &= 4 - c \\ 16 - x^2 - y^2 &= (4 - c)^2 \\ -x^2 - y^2 &= (4 - c)^2 - 16 \\ x^2 + y^2 &= 16 - (4 - c)^2 \end{aligned}$$

Que corresponde a uma circunferência centrada na origem de raio

$$r = \sqrt{16 - (4 - c)^2}$$

Escolhendo os valores $c = 1$, $c = 2$ e $c = 4$, temos as curvas de nível

$$\gamma_1: x^2 + y^2 = 16 - (4 - 1)^2 = 16 - 9 = 7$$

$$\gamma_2: x^2 + y^2 = 16 - (4 - 2)^2 = 16 - 4 = 12$$

$$\gamma_3: x^2 + y^2 = 16 - (4 - 4)^2 = 16 - 0 = 16$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) \left(4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}\right)}{4^2 - \left(\sqrt{16 - x^2 - y^2}\right)^2}$$

c) Calcolando o limite

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{f(x, y)}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}} \times$$

$$\frac{4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}}{4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) \left(4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}\right)}{16 - (16 - x^2 - y^2)}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \left(4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}\right)$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}\right)$$

$$= 4 + \sqrt{16 - 0^2 - 0^2}$$

$$= 4 + 4 = 8$$

4 [25] Dado $z = \frac{(1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i}{2 + 2i}$, calcule

- a) a parte real de z ,
- b) a parte imaginária de z ,
- c) o módulo de z ,
- d) o argumento de z

Avaliando z

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i}{2 + 2i} \\ &= \frac{[(1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i](2 - 2i)}{(2 + 2i)(2 - 2i)} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{3})(2 - 2i) + (1 + \sqrt{3})(2i + 2)}{2^2 + 2^2} \\ &= \frac{2 - 2i - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}i + 2i + 2 + 2\sqrt{3}i + 2\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{4 + 4\sqrt{3}i}{8} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Parte real de z

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$$

Parte imaginária de z

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Módulo de z

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1+3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Argumento de z , $\varphi = \arg(z)$

$$\operatorname{sen}(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{1}{2}$$

$$\arg(z) = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$