

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

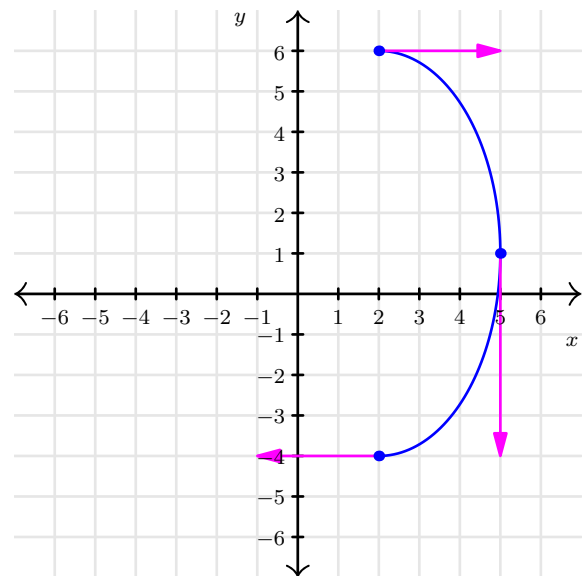
1 [50%] Uma partícula descreve uma trajetória elíptica descrita pelas equações paramétricas

$$x(t) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + 2$$

$$y(t) = 5 \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + 1$$

$$0 \leq t \leq \pi$$

- a) [20%] calcule o vetor tangente à curva
- b) [10%] avalie o vetor tangente em $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$ e em $t = \pi$
- c) [20%] esboce a curva e os vetores tangentes calculados



a) O vetor tangente é $v(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$

Avaliando cada derivada

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[2 + 3 \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \right] = 3 \frac{d}{dt} \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = -3 \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = 3 \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left[1 + 5 \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \right] = 5 \frac{d}{dt} \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = 5 \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = -5 \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right)$$

Portanto, $v(t) = \begin{pmatrix} 3 \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \\ -5 \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \end{pmatrix}$

b) Avaliando o vetor tangente nos pontos $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$ e em $t = \pi$

$$\begin{aligned}
 v(0) &= \begin{pmatrix} 3 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \\ -5 \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \end{pmatrix} \bigg|_0 & v \left(\frac{\pi}{2} \right) &= \begin{pmatrix} 3 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \\ -5 \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \end{pmatrix} \bigg|_{\frac{\pi}{2}} & v(\pi) &= \begin{pmatrix} 3 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \\ -5 \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \end{pmatrix} \bigg|_{\pi} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ -5 \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} 3 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \\ -5 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} 3 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \pi \right) \\ -5 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \pi \right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 \times 1 \\ -5 \times 0 \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} 3 \operatorname{sen} (0) \\ -5 \cos (0) \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} 3 \operatorname{sen} \left(\frac{-\pi}{2} \right) \\ -5 \cos \left(\frac{-\pi}{2} \right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} 3 \times 0 \\ -5 \times 1 \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} 3(-1) \\ -5 \times 0 \end{pmatrix} \\
 & & &= \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

c) Calculando os pontos associados a $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$ e em $t = \pi$

$$x(0) = \left(3 \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + 2 \right) \bigg|_0 = 3 \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + 2 = 3 \times 0 + 2 = 2$$

$$y(0) = \left(5 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + 1 \right) \bigg|_0 = 5 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) + 1 = 5 \times 1 + 1 = 6$$

$$x \left(\frac{\pi}{2} \right) = \left(3 \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + 2 \right) \bigg|_{\frac{\pi}{2}} = 3 \cos (0) + 2 = 3 \times 1 + 2 = 5$$

$$y \left(\frac{\pi}{2} \right) = \left(5 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + 1 \right) \bigg|_{\frac{\pi}{2}} = 5 \operatorname{sen} (0) + 1 = 5 \times 0 + 1 = 1$$

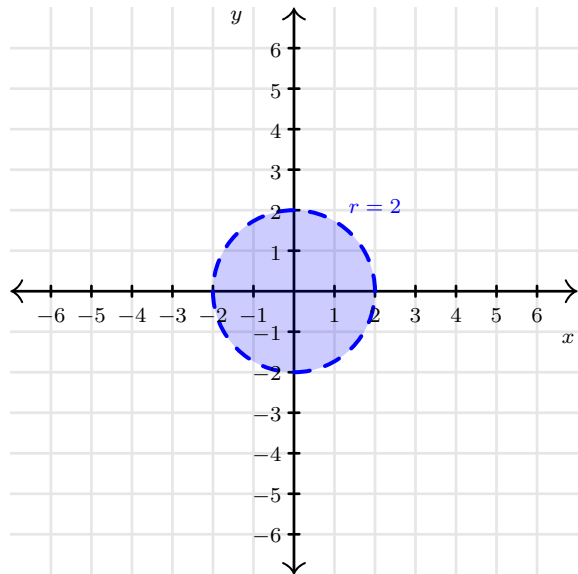
$$x(\pi) = \left(3 \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + 2 \right) \bigg|_{\pi} = 3 \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + 2 = 3 \times 0 + 2 = 2$$

$$y(\pi) = \left(5 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + 1 \right) \bigg|_{\pi} = 5 \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{2} \right) + 1 = 5(-1) + 1 = -4$$

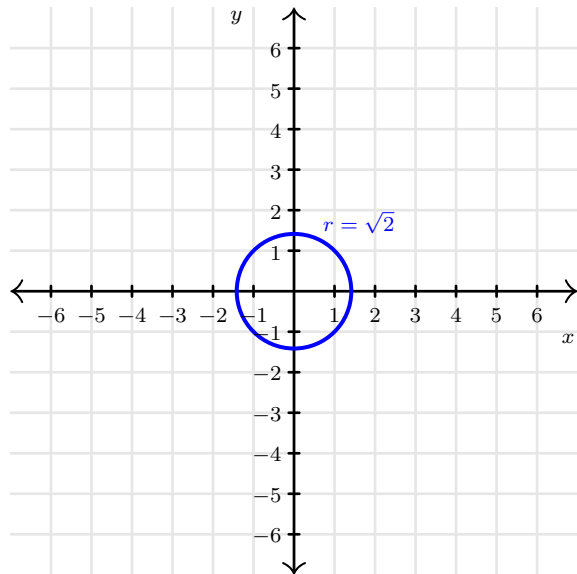
2 [50%] Considerando a função $f(x, y) = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

- (a) [10%] determine o domínio de f
- (b) [10%] esboce o domínio
- (c) [20%] determine todas as curvas de nível de f
- (d) [10%] determine e esboce a curva de nível que passa pelo ponto $(1, 1)$

Domínio



Curva de nível



a) Não podemos calcular a raiz quadrada de um número negativo e não podemos dividir por zero, portanto, o domínio de f é o conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$4 - x^2 - y^2 > 0$$

Podemos reescrever essa condição como

$$x^2 + y^2 < 2^2$$

ou seja, os pontos do disco centrado em $(0, 0)$ de raio 2. Assim, o domínio é

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2^2\}$$

c) Para determinarmos todas as curvas de nível de f precisamos determinar sua imagem. Observamos que dentro do domínio temos

$$\begin{array}{ll} 4 - x^2 - y^2 > 0 & 4 - x^2 - y^2 \leq 4 \\ \sqrt{4 - x^2 - y^2} > 0 & \sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq 2 \\ \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2} > 0 & \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2} \leq 1 \\ 0 < \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} < \infty & \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \geq 1 \end{array}$$

Assim, $\text{Im}_f = \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 1\}$. As curvas de nível de f consistem dos pontos que satisfazem $f(x, y) = c$ para cada $c \in \text{Im}_f$.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= c \\ \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} &= c \\ \sqrt{4 - x^2 - y^2} &= \frac{2}{c} \\ 4 - x^2 - y^2 &= \frac{4}{c^2} \\ -x^2 - y^2 &= \frac{4}{c^2} - 4 \\ x^2 + y^2 &= 4 - \frac{4}{c^2} \end{aligned}$$

As curvas de nível são circunferências centradas na origem com raio $r = \sqrt{4 - \frac{4}{c^2}} = \frac{2}{c} \sqrt{c^2 - 1}$

c) A curva de nível que passa pelo ponto $(1, 1)$ tem o valor

$$c = f(1, 1) = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \Big|_{(1,1)} = \frac{2}{\sqrt{4 - 1^2 - 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Correspondendo a uma circunferência de raio

$$r = \sqrt{4 - \frac{4}{c^2}} \Big|_{\sqrt{2}} = \sqrt{4 - \frac{4}{2}} = \sqrt{2} \approx 1,414$$