

## GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

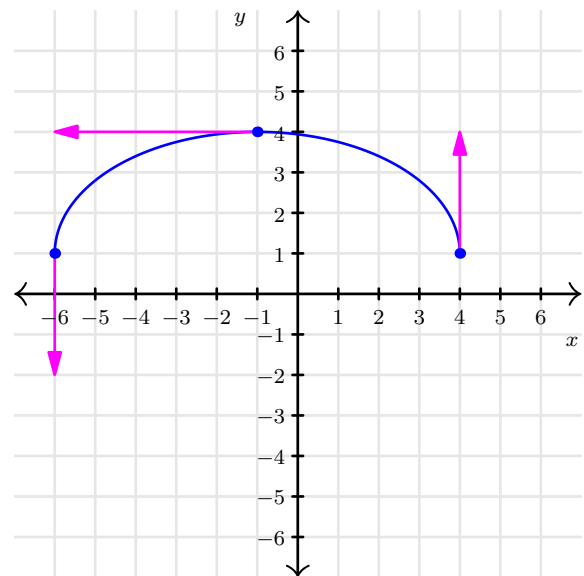
1 [50%] Uma partícula descreve uma trajetória elíptica descrita pelas equações paramétricas

$$x(t) = 5 \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) - 1$$

$$y(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 1$$

$$0 \leq t \leq \pi$$

- a) [20%] calcule o vetor tangente à curva
- b) [10%] avalie o vetor tangente em  $t = 0$ ,  $t = \frac{\pi}{2}$  e em  $t = \pi$
- c) [20%] esboce a curva e os vetores tangentes calculados



a) O vetor tangente é  $v(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$

Avaliando cada derivada

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ 5 \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) - 1 \right] = 5 \frac{d}{dt} \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 5 \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -5 \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 1 \right] = 3 \frac{d}{dt} \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

Portanto,  $v(t) = \begin{pmatrix} -5 \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \end{pmatrix}$

**b)** Avaliando o vetor tangente nos pontos  $t = 0$ ,  $t = \frac{\pi}{2}$  e em  $t = \pi$

$$\begin{aligned}
 v(0) &= \left( \begin{array}{c} -5 \cos \left( \frac{\pi}{2} - t \right) \\ 3 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - t \right) \end{array} \right) \Big|_0 & v\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left( \begin{array}{c} -5 \cos \left( \frac{\pi}{2} - t \right) \\ 3 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - t \right) \end{array} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}} & v(\pi) &= \left( \begin{array}{c} -5 \cos \left( \frac{\pi}{2} - t \right) \\ 3 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - t \right) \end{array} \right) \Big|_{\pi} \\
 &= \left( \begin{array}{c} -5 \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) \\ 3 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) \end{array} \right) & &= \left( \begin{array}{c} -5 \cos (0) \\ 3 \operatorname{sen} (0) \end{array} \right) & &= \left( \begin{array}{c} -5 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \pi \right) \\ 3 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \pi \right) \end{array} \right) \\
 &= \left( \begin{array}{c} -5 \times 0 \\ 3 \times 1 \end{array} \right) & &= \left( \begin{array}{c} -5 \times 1 \\ 3 \times 0 \end{array} \right) & &= \left( \begin{array}{c} -5 \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) \\ 3 \operatorname{sen} \left( -\frac{\pi}{2} \right) \end{array} \right) \\
 &= \left( \begin{array}{c} 0 \\ 3 \end{array} \right) & &= \left( \begin{array}{c} -5 \\ 0 \end{array} \right) & &= \left( \begin{array}{c} -5 \times 0 \\ 3(-1) \end{array} \right) \\
 & & & & &= \left( \begin{array}{c} 0 \\ -3 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

**b)** Calculando os pontos associados a  $t = 0$ ,  $t = \frac{\pi}{2}$  e em  $t = \pi$

$$x(0) = \left( 5 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - t \right) - 1 \right) \Big|_0 = 5 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) - 1 = 5 \times 1 - 1 = 4$$

$$y(0) = \left( 3 \cos \left( \frac{\pi}{2} - t \right) + 1 \right) \Big|_0 = 3 \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + 1 = 3 \times 0 + 1 = 1$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left( 5 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - t \right) - 1 \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}} = 5 \operatorname{sen} (0) - 1 = 5 \times 0 - 1 = -1$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left( 3 \cos \left( \frac{\pi}{2} - t \right) + 1 \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}} = 3 \cos (0) + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$$

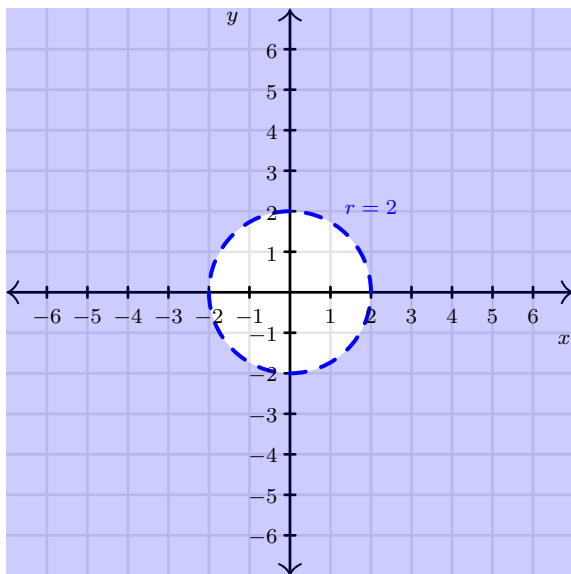
$$x(\pi) = \left( 5 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - t \right) - 1 \right) \Big|_{\pi} = 5 \operatorname{sen} \left( -\frac{\pi}{2} \right) - 1 = 5(-1) - 1 = -6$$

$$y(\pi) = \left( 3 \cos \left( \frac{\pi}{2} - t \right) + 1 \right) \Big|_{\pi} = 3 \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + 1 = 3 \times 0 + 1 = 1$$

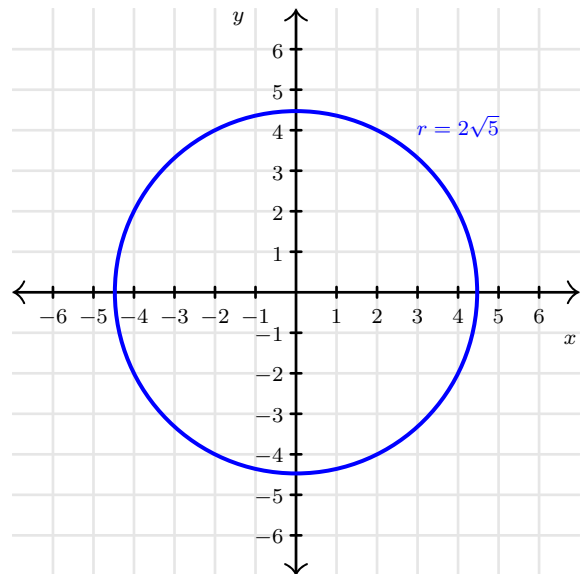
**2** [50%] Considerando a função  $f(x, y) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$

- (a) [10%] determine o domínio de  $f$
- (b) [10%] esboce o domínio
- (c) [20%] determine todas as curvas de nível de  $f$
- (d) [10%] determine e esboce a curva de nível que passa pelo ponto  $(2, 4)$

Domínio



Curva de nível



**a)** Não podemos calcular a raiz quadrada de um número negativo e não podemos dividir por zero, portanto, o domínio de  $f$  é o conjunto de todos os pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que

$$x^2 + y^2 - 4 > 0$$

Podemos reescrever essa condição como

$$x^2 + y^2 > 2^2$$

ou seja, os pontos exteriores ao disco centrado em  $(0, 0)$  de raio 2. Assim, o domínio é

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 2^2\}$$

**c)** Para determinarmos todas as curvas de nível de  $f$  precisamos determinar sua imagem. Observamos que dentro do domínio temos

$$x^2 + y^2 - 4 > 0$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4} > 0$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}{2} > 0$$

$$0 < \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}} < \infty$$

Assim,  $\text{Im}_f = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\}$ . As curvas de nível de  $f$  consistem dos pontos que satisfazem  $f(x, y) = c$  para cada  $c \in \text{Im}_f$ .

$$f(x, y) = c$$

$$\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}} = c$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4} = \frac{2}{c}$$

$$x^2 + y^2 - 4 = \frac{4}{c^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{4}{c^2} + 4$$

As curvas de nível são circunferências centradas na origem com raio  $r = \sqrt{\frac{4}{c^2} + 4} = \frac{2}{c}\sqrt{1 + c^2}$

**d)** A curva de nível que passa pelo ponto  $(2, 4)$  tem o valor

$$c = f(2, 4) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}} \Big|_{(2,4)} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2 - 4}} = \frac{2}{\sqrt{4 + 16 - 4}} = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Correspondendo a uma circunferência de raio

$$r = \sqrt{\frac{4}{c^2} + 4} \Big|_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{1/4} + 4} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5} \approx 4,7321$$