

GABARITO

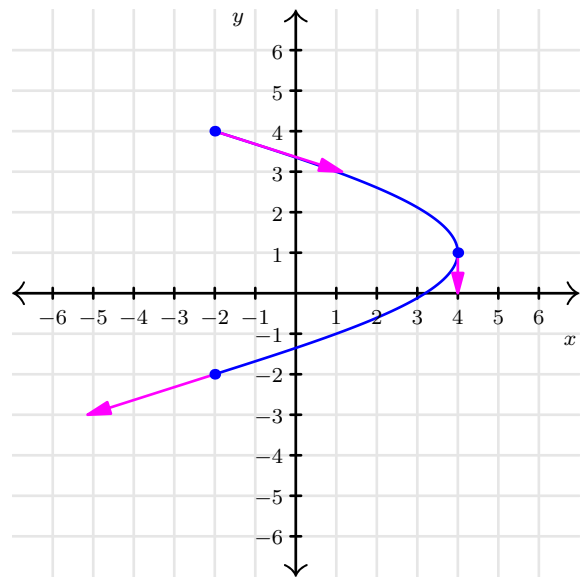
1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [50%] Uma partícula descreve uma trajetória senoidal descrita pelas equações paramétricas

$$x(t) = 6 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) - 2$$

$$y(t) = 4 - 3t \quad 0 \leq t \leq 2$$

- a) [20%] calcule o vetor tangente à curva
- b) [10%] avalie o vetor tangente em $t = 0$, $t = 1$ e em $t = 2$
- c) [20%] esboce a curva e os vetores tangentes calculados (divida os vetores por 3)



a) O vetor tangente é $v(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$

Avaliando cada derivada

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[6 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) - 2 \right] = 6 \frac{d}{dt} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 6 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi t}{2}\right) = 6 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \frac{\pi}{2} = 3\pi \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} [4 - 3t] = -3$$

Portanto, $v(t) = \begin{pmatrix} 3\pi \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \\ -3 \end{pmatrix}$

b) Avaliando o vetor tangente nos pontos $t = 0$, $t = 1$ e em $t = 2$

$$\begin{aligned} v(0) &= \left(\begin{array}{c} 3\pi \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \\ -3 \end{array} \right) \Big|_0 & v(1) &= \left(\begin{array}{c} 3\pi \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \\ -3 \end{array} \right) \Big|_1 & v(2) &= \left(\begin{array}{c} 3\pi \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \\ -3 \end{array} \right) \Big|_2 \\ &= \left(\begin{array}{c} 3\pi \cos(0) \\ -3 \end{array} \right) & &= \left(\begin{array}{c} 3\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ -3 \end{array} \right) & &= \left(\begin{array}{c} 3\pi \cos(\pi) \\ -3 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} 3\pi \times 1 \\ -3 \end{array} \right) & &= \left(\begin{array}{c} 3\pi \times 0 \\ -3 \end{array} \right) & &= \left(\begin{array}{c} 3\pi(-1) \\ -3 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} 3\pi \\ -3 \end{array} \right) & &= \left(\begin{array}{c} 0 \\ -3 \end{array} \right) & &= \left(\begin{array}{c} -3\pi \\ -3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

b) Calculando os pontos associados a $t = 0$, $t = 1$ e em $t = 2$

$$x(0) = \left(6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) - 2 \right) \Big|_0 = 6 \operatorname{sen}(0) - 2 = -2$$

$$y(0) = (4 - 3t) \Big|_0 = 4 - 3 \times 0 = 4$$

$$x(1) = \left(6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) - 2 \right) \Big|_1 = 6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 = 6 \times 1 - 2 = 4$$

$$y(1) = (4 - 3t) \Big|_1 = 4 - 3 \times 1 = 1$$

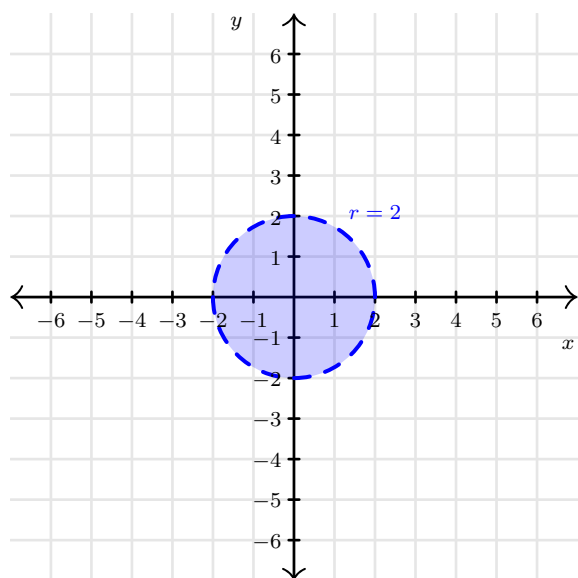
$$x(2) = \left(6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) - 2 \right) \Big|_2 = 6 \operatorname{sen}(\pi) - 2 = 6 \times 0 - 2 = -2$$

$$y(2) = (4 - 3t) \Big|_2 = 4 - 3 \times 2 = -2$$

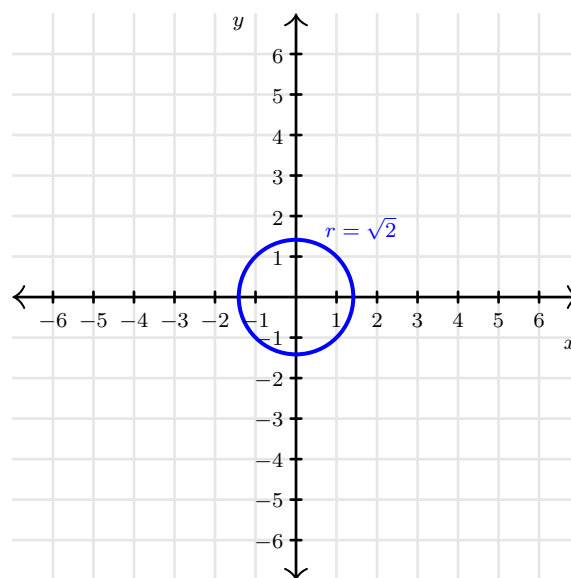
2 [50%] Considerando a função $f(x, y) = \ln(8 - 2x^2 - 2y^2)$

- (a) [10%] determine o domínio de f
- (b) [10%] esboce o domínio
- (c) [20%] determine todas as curvas de nível de f
- (d) [10%] determine e esboce a curva de nível que passa pelo ponto $(1, 1)$

Domínio



Curva de nível



a) Não podemos calcular logaritmo de um número negativo ou do zero, portanto, o domínio de f é o conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$8 - 2x^2 - 2y^2 > 0$$

Podemos reescrever essa condição como

$$x^2 + y^2 < 2^2$$

ou seja, os pontos do disco de raio 2 centrado na origem. Assim, o domínio é

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$$

c) Para determinarmos todas as curvas de nível de f precisamos determinar sua imagem. Observamos que dentro do domínio temos

$$0 \leq x^2 + y^2 < 4$$

$$0 \leq 2x^2 + 2y^2 < 8$$

$$0 \geq -2x^2 - 2y^2 > -8$$

$$-8 < -2x^2 - 2y^2 \leq 0$$

$$0 < 8 - 2x^2 - 2y^2 \leq 8$$

$$\ln(8 - 2x^2 - 2y^2) \leq \ln(8)$$

Assim, $\text{Im}_f = \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq \ln(8)\}$. As curvas de nível de f consistem dos pontos que satisfazem $f(x, y) = c$ para cada $c \in \text{Im}_f$.

$$f(x, y) = c$$

$$\ln(8 - 2x^2 - 2y^2) = c$$

$$8 - 2x^2 - 2y^2 = e^c$$

$$-2x^2 - 2y^2 = e^c - 8$$

$$x^2 + y^2 = 4 - \frac{e^c}{2}$$

As curvas de nível são circunferências centradas na origem com raio $r = \sqrt{4 - \frac{e^c}{2}}$

c) A curva de nível que passa pelo ponto $(1, 1)$ tem o valor

$$c = f(1, 1) = \ln(8 - 2x^2 - 2y^2) \Big|_{(1,1)} = \ln(8 - 2 \times 1^2 - 2 \times 1^2) = \ln(4)$$

Correspondendo a uma circunferência de raio

$$r = \sqrt{4 - \frac{e^c}{2}} \Big|_{\ln(4)} = \sqrt{4 - \frac{e^{\ln(4)}}{2}} = \sqrt{4 - \frac{4}{2}} = \sqrt{2} \approx 1,414$$