

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [30%] Use a definição para calcular a derivada parcial de $f(x, y) = 4x^2y^2 + xy$ por y

Pela definição,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Calculando,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 4x^2y^2 + xy \\ f(x, y+h) &= 4x^2(y+h)^2 + x(y+h) \\ &= 4x^2(y^2 + 2yh + h^2) + xy + xh \\ &= 4x^2y^2 + 8x^2yh + 4x^2h^2 + xy + xh \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(x, y+h) - f(x, y) &= (4x^2y^2 + 8x^2yh + 4x^2h^2 + xy + xh) - (4x^2y^2 + xy) \\ &= 8x^2yh + 4x^2h^2 + xh \\ &= (8x^2y + x + 4x^2h)h \end{aligned}$$

Dividindo por h

$$\frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = 8x^2y + x + 4x^2h$$

Tomando o limite

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} (8x^2y + x + 4x^2h) \\ &= 8x^2y + x \end{aligned}$$

2 [40%] Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 3)$, respeitando a ordem descrita na notação, de $f(x, y) = \ln(yx^2 + xy^2)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [\ln(yx^2 + xy^2)] \\ &= \frac{1}{yx^2 + xy^2} \frac{\partial}{\partial y} (yx^2 + xy^2) \\ &= \frac{1}{yx^2 + xy^2} \left(\frac{\partial}{\partial y} (yx^2) + \frac{\partial}{\partial y} (xy^2) \right) \\ &= \frac{1}{yx^2 + xy^2} \left(x^2 \frac{\partial y}{\partial y} + x \frac{\partial y^2}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{yx^2 + xy^2} (x^2 + 2xy) \\ &= \frac{x^2 + 2xy}{yx^2 + xy^2} \\ &= \frac{x + 2y}{yx + y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x + 2y}{yx + y^2} \right) \\ &= \frac{1}{(yx + y^2)^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (x + 2y) (yx + y^2) - (x + 2y) \frac{\partial}{\partial x} (yx + y^2) \right] \\ &= \frac{1}{(yx + y^2)^2} [1(yx + y^2) - (x + 2y)y] \\ &= \frac{yx + y^2 - (xy + 2y^2)}{(yx + y^2)^2} \\ &= \frac{-y^2}{(yx + y^2)^2} \\ &= \frac{-y^2}{y^2(x + y)^2} \\ &= \frac{-1}{(x + y)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 3) = \frac{-1}{(x + y)^2} \Big|_{(2,3)} = \frac{-1}{(2 + 3)^2} = \frac{-1}{5^2} = \frac{-1}{25}$$

3 [30%] Utilize a derivação implícita para encontrar $\frac{\partial z}{\partial y}$, assumindo que a equação $xy^2 + z^2 = 4xe^{yz}$ define z como função de x e y

Utilizando a fórmula com $F(x, y, z) = xy^2 + z^2 - 4xe^{yz}$

$$\begin{aligned}F_y(x, y, z) &= \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) \\&= \frac{\partial}{\partial y} (xy^2 + z^2 - 4xe^{yz}) \\&= \frac{\partial}{\partial y} (xy^2) + \frac{\partial}{\partial y} (z^2) - \frac{\partial}{\partial y} (4xe^{yz}) \\&= x \frac{\partial y^2}{\partial y} + 0 - 4x \frac{\partial}{\partial y} (e^{yz}) \\&= x2y - 4xe^{yz} \frac{\partial}{\partial y} (yz) \\&= 2xy - 4xe^{yz} z \\&= 2xy - 4xze^{yz}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_z(x, y, z) &= \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \\&= \frac{\partial}{\partial z} (xy^2 + z^2 - 4xe^{yz}) \\&= \frac{\partial}{\partial z} (xy^2) + \frac{\partial}{\partial z} (z^2) - \frac{\partial}{\partial z} (4xe^{yz}) \\&= 0 + 2z - 4x \frac{\partial}{\partial z} (e^{yz}) \\&= 2z - 4xe^{yz} \frac{\partial}{\partial z} (yz) \\&= 2z - 4xye^{yz}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y, z) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{2xy - 4xze^{yz}}{2z - 4xye^{yz}} = \frac{2xze^{yz} - xy}{z - 2xye^{yz}}$$