CFVVI – Prova 2 – Turma 7 17/10/2025

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [30%] Calcule o limite ou mostre que ele não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5y^4\cos^2(x)}{x^4+y^4}$

Escolhendo o caminho $y = 0$ temos

$$\begin{aligned}
L_1 &= \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5y^4\cos^2(x)}{x^4+y^4}\bigg|_{y=0}\right) \\
&= \lim_{x\to0} \frac{5\times 0\cos^2(x)}{x^4+0} \\
&= \lim_{x\to0} \frac{0}{x^4} \\
&= \lim_{x\to0} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Escolhendo o caminho $x = 0$ temos

$$\begin{aligned}
L_2 &= \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5y^4\cos^2(x)}{x^4+y^4}\bigg|_{x=0}\right) \\
&= \lim_{y\to0} \frac{5y^4\cos^2(0)}{0+y^4} \\
&= \lim_{y\to0} \frac{5y^4}{y^4} \\
&= \lim_{y\to0} 5 \\
&= 5
\end{aligned}$$

Limites diferentes por caminhos diferentes, portanto o limite não existe.

2 [40%] Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(2, \sqrt{\pi}\right)$, respeitando a ordem descrita na notação, de $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy^2)}{2xe^x}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\operatorname{sen}(xy^2)}{2xe^x}\right] \\
&= \frac{1}{2xe^x}\frac{\partial}{\partial y}\left[\operatorname{sen}\left(xy^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{2xe^x}\cos\left(xy^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2\right) \\
&= \frac{1}{2xe^x}\cos\left(xy^2\right)x\frac{\partial y^2}{\partial y} \\
&= \frac{1}{2e^x}\cos\left(xy^2\right)2y \\
&= \frac{y\cos(xy^2)}{e^x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y\cos(xy^2)}{e^x}\right) \\
&= y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(xy^2)}{e^x}\right) \\
&= \frac{y}{e^{2x}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\cos\left(xy^2\right)\right]e^x - \cos\left(xy^2\right)\frac{\partial e^x}{\partial x}\right] \\
&= \frac{y}{e^{2x}}\left[-\operatorname{sen}\left(xy^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(xy^2\right)e^x - \cos\left(xy^2\right)e^x\right] \\
&= \frac{-y}{e^x}\left[\operatorname{sen}\left(xy^2\right)y^2 + \cos\left(xy^2\right)\right] \\
&= \frac{-y}{e^x}\left[y^2\operatorname{sen}\left(xy^2\right) + \cos\left(xy^2\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, \sqrt{\pi}) &= \frac{-y}{e^x}\left[y^2\operatorname{sen}\left(xy^2\right) + \cos\left(xy^2\right)\right]\Big|_{(2,\sqrt{\pi})} \\
&= \frac{-\sqrt{\pi}}{e^2}\left[(\sqrt{\pi})^2\operatorname{sen}\left(2\left(\sqrt{\pi}\right)^2\right) + \cos\left(2\left(\sqrt{\pi}\right)^2\right)\right] \\
&= \frac{-\sqrt{\pi}}{e^2}\left[\pi\operatorname{sen}(2\pi) + \cos(2\pi)\right] \\
&= \frac{-\sqrt{\pi}}{e^2}[0+1] \\
&= \frac{-\sqrt{\pi}}{e^2}
\end{aligned}$$

3 [30%] Assumindo que a equação $xy^2 + z^2 = 4xe^{yz}$ define z como função de x e y, utilize a derivação implícita para encontrar $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Utilizando a fórmula com $F(x, y, z) = xy^2 + z^2 - 4xe^{yz}$

$$\begin{aligned}
F_y(x,y,z) &= \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2 + z^2 - 4xe^{yz}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(z^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(4xe^{yz}\right) \\
&= x\frac{\partial y^2}{\partial y} + 0 - 4x\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{yz}\right) \\
&= x2y - 4xe^{yz}\frac{\partial}{\partial y}(yz) \\
&= 2xy - 4xe^{yz}z \\
&= 2xy - 4xze^{yz} \\
F_z(x,y,z) &= \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(xy^2 + z^2 - 4xe^{yz}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(xy^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z^2\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(4xe^{yz}\right) \\
&= 0 + 2z - 4x\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{yz}\right) \\
&= 2z - 4xe^{yz}\frac{\partial}{\partial z}(yz) \\
&= 2z - 4xye^{yz}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{2xy - 4xze^{yz}}{2z - 4xye^{yz}} = \frac{2xze^{yz} - xy}{z - 2xye^{yz}}$$