

## GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [30%] Calcule o limite ou mostre que ele não existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - \text{sen}^2(y)}{2x^2 - y^2}$

Escolhendo o caminho  $y = 0$  temos

$$\begin{aligned} L_1 &= \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - \text{sen}^2(y)}{2x^2 - y^2} \right) \Big|_{y=0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \text{sen}^2(0)}{2x^2 - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Escolhendo o caminho  $x = 0$  temos

$$\begin{aligned} L_2 &= \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - \text{sen}^2(y)}{2x^2 - y^2} \right) \Big|_{x=0} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - \text{sen}^2(y)}{0 - y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - \text{sen}^2(y)}{0 - y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen}(y)}{y} \right)^2 \\ &= \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(y)}{y} \right)^2 \\ &= 1^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Limites diferentes por caminhos diferentes, portanto o limite não existe.

2 [40%] Calcule  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, 1)$  de  $f(x, y) = x^4 \ln(y^2 x^2 - xy)$  respeitando a ordem descrita na notação

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [x^4 \ln(y^2 x^2 - xy)] \\
 &= x^4 \frac{\partial}{\partial y} [\ln(y^2 x^2 - xy)] \\
 &= x^4 \frac{1}{y^2 x^2 - xy} \frac{\partial}{\partial y} (y^2 x^2 - xy) \\
 &= \frac{x^4}{x^2 y^2 - xy} \left( \frac{\partial}{\partial y} (y^2 x^2) - \frac{\partial}{\partial y} (xy) \right) \\
 &= \frac{x^3}{xy^2 - y} \left( x^2 \frac{\partial y^2}{\partial y} - x \frac{\partial y}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{x^3}{xy^2 - y} (x^2 2y - x) \\
 &= \frac{2x^5 y - x^4}{xy^2 - y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2x^5 y - x^4}{xy^2 - y} \right) \\
 &= \frac{1}{(xy^2 - y)^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (2x^5 y - x^4) (xy^2 - y) - (2x^5 y - x^4) \frac{\partial}{\partial x} (xy^2 - y) \right] \\
 &= \frac{1}{(xy^2 - y)^2} \left[ \left( 2y \frac{\partial x^5}{\partial x} - \frac{\partial x^4}{\partial x} \right) (xy^2 - y) - (2x^5 y - x^4) \left( y^2 \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{(xy^2 - y)^2} \left[ (10yx^4 - 4x^3) (xy^2 - y) - (2x^5 y - x^4) y^2 \right] \\
 &= \frac{(10yx^4 - 4x^3) (xy^2 - y) - (2x^5 y - x^4) y^2}{(xy^2 - y)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, 1) &= \frac{(10yx^4 - 4x^3) (xy^2 - y) - (2x^5 y - x^4) y^2}{(xy^2 - y)^2} \Big|_{(-1, 1)} \\
 &= \frac{(10(1)(-1)^4 - 4(-1)^3) ((-1)(1)^2 - (1)) - (2(-1)^5(1) - (-1)^4) (1)^2}{((-1)(1)^2 - (1))^2} \\
 &= \frac{(10 + 4) (-1 - 1) - (-2 - 1)}{(-1 - 1)^2} \\
 &= \frac{14(-2) + 3}{(-2)^2} = \frac{-25}{4}
 \end{aligned}$$

3 [30%] Assumindo que a equação  $x^3y + xz^2 = 4x \operatorname{sen}(yz)$  define  $z$  como função de  $x$  e  $y$ , utilize a derivação implícita para encontrar  $\frac{\partial z}{\partial y}$

Utilizando a fórmula com  $F(x, y, z) = x^3y + xz^2 - 4x \operatorname{sen}(yz)$

$$\begin{aligned} F_y(x, y, z) &= \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (x^3y + xz^2 - 4x \operatorname{sen}(yz)) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (x^3y) + \frac{\partial}{\partial y} (xz^2) - \frac{\partial}{\partial y} (4x \operatorname{sen}(yz)) \\ &= x^3 \frac{\partial y}{\partial y} + 0 - 4x \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{sen}(yz)) \\ &= x^3 - 4x \cos(yz) \frac{\partial yz}{\partial y} \\ &= x^3 - 4xz \cos(yz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_z(x, y, z) &= \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} (x^3y + xz^2 - 4x \operatorname{sen}(yz)) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} (x^3y) + \frac{\partial}{\partial z} (xz^2) - \frac{\partial}{\partial z} (4x \operatorname{sen}(yz)) \\ &= 0 + x \frac{\partial z^2}{\partial z} - 4x \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{sen}(yz)) \\ &= 2xz - 4x \cos(yz) \frac{\partial yz}{\partial z} \\ &= 2xz - 4xy \cos(yz) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y, z) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{x^3 - 4xz \cos(yz)}{2xz - 4xy \cos(yz)} = \frac{4xz \cos(yz) - x^3}{2xz - 4xy \cos(yz)} = \frac{4z \cos(yz) - x^2}{2z - 4y \cos(yz)}$$