

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [30%] Calcule o limite ou mostre que ele não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5y^4 \cos^2(x)}{x^4 + y^4}$

Escolhendo o caminho $y = 0$ temos

$$\begin{aligned} L_1 &= \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5y^4 \cos^2(x)}{x^4 + y^4} \Big|_{y=0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \times 0 \cos^2(x)}{x^4 + 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Escolhendo o caminho $x = 0$ temos

$$\begin{aligned} L_2 &= \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5y^4 \cos^2(x)}{x^4 + y^4} \Big|_{x=0} \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y^4 \cos^2(0)}{0 + y^4} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y^4}{y^4} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Limites diferentes por caminhos diferentes, portanto o limite não existe.

2 [40%] Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, \sqrt{\pi})$, respeitando a ordem descrita na notação, de $f(x, y) = \frac{\text{sen}(xy^2)}{2xe^x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\text{sen}(xy^2)}{2xe^x} \right] \\ &= \frac{1}{2xe^x} \frac{\partial}{\partial y} [\text{sen}(xy^2)] \\ &= \frac{1}{2xe^x} \cos(xy^2) \frac{\partial}{\partial y} (xy^2) \\ &= \frac{1}{2xe^x} \cos(xy^2) x \frac{\partial y^2}{\partial y} \\ &= \frac{1}{2e^x} \cos(xy^2) 2y \\ &= \frac{y \cos(xy^2)}{e^x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y \cos(xy^2)}{e^x} \right) \\ &= y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cos(xy^2)}{e^x} \right) \\ &= \frac{y}{e^{2x}} \left[\frac{\partial}{\partial x} [\cos(xy^2)] e^x - \cos(xy^2) \frac{\partial e^x}{\partial x} \right] \\ &= \frac{y}{e^{2x}} \left[-\text{sen}(xy^2) \frac{\partial}{\partial x} (xy^2) e^x - \cos(xy^2) e^x \right] \\ &= \frac{-y}{e^x} [\text{sen}(xy^2) x 2y + \cos(xy^2)] \\ &= \frac{-y}{e^x} [2xy \text{sen}(xy^2) + \cos(xy^2)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, \sqrt{\pi}) &= \frac{-y}{e^x} [2xy \text{sen}(xy^2) + \cos(xy^2)] \Big|_{(2, \sqrt{\pi})} \\ &= \frac{-\sqrt{\pi}}{e^2} [2 \times 2\sqrt{\pi} \text{sen}(2(\sqrt{\pi})^2) + \cos(2(\sqrt{\pi})^2)] \\ &= \frac{-\sqrt{\pi}}{e^2} [4\sqrt{\pi} \text{sen}(2\pi) + \cos(2\pi)] \\ &= \frac{-\sqrt{\pi}}{e^2} [0 + 1] \\ &= \frac{-\sqrt{\pi}}{e^2}\end{aligned}$$

3 [30%] Assumindo que a equação $x^3y + xz^2 = 4x \operatorname{sen}(yz)$ define z como função de x e y , utilize a derivação implícita para encontrar $\frac{\partial z}{\partial y}$

Utilizando a fórmula com $F(x, y, z) = x^3y + xz^2 - 4x \operatorname{sen}(yz)$

$$\begin{aligned}F_y(x, y, z) &= \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) \\&= \frac{\partial}{\partial y} (x^3y + xz^2 - 4x \operatorname{sen}(yz)) \\&= \frac{\partial}{\partial y} (x^3y) + \frac{\partial}{\partial y} (xz^2) - \frac{\partial}{\partial y} (4x \operatorname{sen}(yz)) \\&= x^3 \frac{\partial y}{\partial y} + 0 - 4x \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{sen}(yz)) \\&= x^3 - 4x \cos(yz) \frac{\partial yz}{\partial y} \\&= x^3 - 4xz \cos(yz)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_z(x, y, z) &= \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \\&= \frac{\partial}{\partial z} (x^3y + xz^2 - 4x \operatorname{sen}(yz)) \\&= \frac{\partial}{\partial z} (x^3y) + \frac{\partial}{\partial z} (xz^2) - \frac{\partial}{\partial z} (4x \operatorname{sen}(yz)) \\&= 0 + x \frac{\partial z^2}{\partial z} - 4x \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{sen}(yz)) \\&= 2xz - 4x \cos(yz) \frac{\partial yz}{\partial z} \\&= 2xz - 4xy \cos(yz)\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y, z) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{x^3 - 4xz \cos(yz)}{2xz - 4xy \cos(yz)} = \frac{4xz \cos(yz) - x^3}{2xz - 4xy \cos(yz)} = \frac{4z \cos(yz) - x^2}{2z - 4y \cos(yz)}$$