CFVVI – Prova 3 – Turma 2 05/11/2025

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [50%] Determine a aproximação linear de $f(x,y) = e^{xy}\cos(xy)$ no ponto $(\pi, 1)$ e use-a para aproximar $f(3.1, 1.02)$. Utilize apenas 2 casas decimais.

A aproximação linear de f em (a,b) é dada por

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Cálculo das derivadas parciais

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy}\cos(xy)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy}\right)\cos(xy) + e^{xy}\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(xy)\right) \\
&= e^{xy}\frac{\partial}{\partial x}(xy)\cos(xy) + e^{xy}\left(-\operatorname{sen}(xy)\right)\frac{\partial}{\partial x}(xy) \\
&= e^{xy}y\cos(xy) - e^{xy}\operatorname{sen}(xy)y \\
&= ye^{xy}\left(\cos(xy) - \operatorname{sen}(xy)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy}\cos(xy)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy}\right)\cos(xy) + e^{xy}\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(xy)\right) \\
&= e^{xy}\frac{\partial}{\partial y}(xy)\cos(xy) + e^{xy}\left(-\operatorname{sen}(xy)\right)\frac{\partial}{\partial y}(xy) \\
&= e^{xy}x\cos(xy) - e^{xy}\operatorname{sen}(xy)x \\
&= xe^{xy}\left(\cos(xy) - \operatorname{sen}(xy)\right)
\end{aligned}$$

Avaliação em $(\pi, 1)$:

$$f(\pi,1) = \left(e^{xy}\cos(xy)\right)\Big|_{(\pi,1)} = e^{\pi}\cos(\pi) = -e^{\pi}$$

$$\begin{aligned}
f_x(\pi,1) &= \left(ye^{xy}\left(\cos(xy) - \operatorname{sen}(xy)\right)\right)\Big|_{(\pi,1)} \\
&= 1e^{\pi}\left(\cos(\pi) - \operatorname{sen}(\pi)\right) = e^{\pi}\left(-1-0\right) = -e^{\pi}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_y(\pi,1) &= \left(xe^{xy}\left(\cos(xy)-\operatorname{sen}(xy)\right)\right)\Big|_{(\pi,1)} \\
&= \pi e^{\pi}\left(\cos(\pi)-\operatorname{sen}(\pi)\right) = \pi e^{\pi}\left(-1-0\right) = -\pi e^{\pi}
\end{aligned}
$$

A aproximação linear é

$$
\begin{aligned}
L(x,y) &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\
&= f(\pi,1) + f_x(\pi,1)(x-\pi) + f_y(\pi,1)(y-1) \\
&= -e^{\pi} - e^{\pi}(x-\pi) - \pi e^{\pi}(y-1) \\
&= -e^{\pi}\left[1 + (x-\pi) + \pi(y-1)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L(3.1, 1.02) &= -e^{\pi}\left[1 + (x-\pi) + \pi(y-1)\right]\Big|_{(3.1,\,1.02)} \\
&= -e^{\pi}\left[1 + (3.1-\pi) + \pi(1.02-1)\right] \\
&= -e^{\pi}\left[1 + (-0.04) + \pi(0.02)\right] \\
&= -e^{\pi}\left[0.96 + 0.02\pi\right]
\end{aligned}
$$

Com uma calculadora podemos avaliar que

$$
\begin{aligned}
L(3.1, 1.02) &= -23.669 \\
f(3.1, 1.02) &= -23.613
\end{aligned}
$$

2 [50%] Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = xe^{yz} + \text{sen}(yz)$ Calcule a derivada direcional de f no ponto $P = (1,0,2)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = (2,1,-1)$.

Normalização o vetor $\mathbf{v}$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}, \qquad \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1).$$

Gradiente de f:

$$\begin{aligned}
f_x(x,y,z) &= e^{yz} \\
f_y(x,y,z) &= xze^{yz} + z\cos(yz) \\
f_z(x,y,z) &= xye^{yz} + y\cos(yz)
\end{aligned}$$

Avaliação no ponto $P = (1{,}0{,}2)$

$$\begin{aligned}
f_x(1,0,2) &= e^0 = 1 \\
f_y(1,0,2) &= 1 \cdot 2 \cdot e^0 + 2\cos(0) = 2 + 2 = 4 \\
f_z(1,0,2) &= 1 \cdot 0 \cdot e^0 + 0\cos(0) = 0
\end{aligned}$$

Assim, $\nabla f(1,0,2) = (1,4,0)$

A derivada direcional é o produto escalar

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}} f(1,0,2) &= \nabla f(1,0,2) \cdot \mathbf{u} \\
&= (1,4,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}(1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)) \\
&= \frac{6}{\sqrt{6}} \\
&= \sqrt{6}
\end{aligned}$$

.