CFVVI – Prova 3 – Turma 7

07/11/2025

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [50%] Considere a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x, y, z) = \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)$. Calcule a derivada direcional de g no ponto $Q = (1, -2, 2)$ na direção apontando do ponto Q para o ponto $R = (3, -1, 5)$.

Vetor direção

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} = R - Q = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -1-(-2) \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Normalização

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14} \qquad \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gradiente de g

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{1 + x^2 + y^2 + z^2} \\ \dfrac{2y}{1 + x^2 + y^2 + z^2} \\ \dfrac{2z}{1 + x^2 + y^2 + z^2} \end{pmatrix}$$

Avaliação no ponto $(1, -2, 2)$. Notando que

$$1 + x^2 + y^2 + z^2 \Big|_{(1,-2,2)} = 1 + 1^2 + (-2)^2 + 2^2 = 10$$

temos

$$\nabla g(1, -2, 2) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{1 + x^2 + y^2 + z^2} \\ \dfrac{2y}{1 + x^2 + y^2 + z^2} \\ \dfrac{2z}{1 + x^2 + y^2 + z^2} \end{pmatrix} \Bigg|_{(1,-2,2)} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{10} \\ \dfrac{-4}{10} \\ \dfrac{4}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} \\ -\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Derivada direcional

$$
\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}}g(1,-2,2) &= \nabla g(1,-2,2)\cdot\mathbf{u}\\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\[2ex] -\frac{2}{5} \\[2ex] \frac{2}{5} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} \\[2ex] \frac{1}{\sqrt{14}} \\[2ex] \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{14}}\left(\frac{1}{5}\cdot 2+\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 1+\frac{2}{5}\cdot 3\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{14}}\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{5}+\frac{6}{5}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\frac{6}{5}\\
&= \frac{6}{5\sqrt{14}}
\end{aligned}
$$

2 [50%] Seja $f(x,y) = e^x \ln(1+x^2+y^2)$. Determine a aproximação linear de f no ponto $(0,1)$ e use-a para aproximar $f(0.05, 0.98)$.

A aproximação linear é

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Cálculo das derivadas parciais

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[e^x \ln(1+x^2+y^2)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[e^x\right] \ln(1+x^2+y^2) + e^x \frac{\partial}{\partial x}\left[\ln(1+x^2+y^2)\right] \\
&= e^x \ln(1+x^2+y^2) + e^x \frac{1}{1+x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial x}\left(1+x^2+y^2\right) \\
&= e^x \left(\ln\left(1+x^2+y^2\right) + \frac{2x}{1+x^2+y^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[e^x \ln(1+x^2+y^2)\right] \\
&= e^x \frac{\partial}{\partial y}\left[\ln(1+x^2+y^2)\right] \\
&= e^x \frac{1}{1+x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial y}\left(1+x^2+y^2\right) \\
&= \frac{2ye^x}{1+x^2+y^2}
\end{aligned}$$

Avaliação em $(0,1)$

$$\begin{aligned}
f(0,1) &= \left[e^x \ln(1+x^2+y^2)\right]\Big|_{(0,1)} \\
&= e^x \ln(1+0^2+1^2) \\
&= \ln 2 \\
f_x(0,1) &= \left[e^x \left(\ln\left(1+x^2+y^2\right) + \frac{2x}{1+x^2+y^2}\right)\right]\Bigg|_{(0,1)} \\
&= e^0 \left(\ln\left(1+0^2+1^2\right) + \frac{2 \times 0}{1+0^2+1^2}\right) \\
&= \ln 2 \\
f_y(0,1) &= \left[\frac{2ye^x}{1+x^2+y^2}\right]\Bigg|_{(0,1)} \\
&= \frac{2 \times 1 \times e^0}{1+0^2+1^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

A aproximação linear é

$$\begin{aligned}
L(x,y) &= \ln(2) + \ln(2)\,x + (y-1) \\
&= \ln(2)\,x + y + (\ln(2) - 1)
\end{aligned}$$

Aproximação em $(0.05, 0.98)$

$$\begin{aligned} L(0.05, 0.98) &= \ln(2) + \ln(2)\,0.05 + (0.98 - 1) \\ &= \ln(2) + \ln(2)\,0.05 - 0.02 \\ &= 1.05\ln(2) - 0.02 \end{aligned}$$

Com uma calculadora podemos avaliar que

$$\begin{aligned} L(0.05, 0.98) &= 0.7078 \\ f(0.05, 0.98) &= 0.7090 \end{aligned}$$