CFVVI – Prova 4 – Turma 2

24/11/2025

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [50%] Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2) - xy$

Calculando o gradiente

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(1 + x^2 + y^2) - xy\right) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} - y$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(1 + x^2 + y^2) - xy\right) = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} - x$$

Igualando o gradiente ao vetor nulo

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{1 + x^2 + y^2} - y = 0 \\ \dfrac{2y}{1 + x^2 + y^2} - x = 0 \end{cases}$$

rearranjando

$$\begin{cases} 2x = y\left(1 + x^2 + y^2\right) \\ 2y = x\left(1 + x^2 + y^2\right) \end{cases}$$

Subtraindo as equações

$$2(x - y) = -(x - y)\left(1 + x^2 + y^2\right)$$

Caso 1: $x \neq y$, dividimos os dois lados por $x - y$, obtendo

$$\begin{aligned} 2(x - y) &= -(x - y)\left(1 + x^2 + y^2\right) \\ 2 &= -\left(1 + x^2 + y^2\right) \\ 2 &= -1 - x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 &= -3 \end{aligned}$$

Não existe solução

Caso 2: $x = y$, a equação $2(x - y) = -(x - y)\left(1 + x^2 + y^2\right)$ é satisfeita
Substituindo na primeira equação e obtemos

$$\begin{aligned} 2x &= y\left(1 + x^2 + y^2\right) \\ 2x &= x\left(1 + x^2 + x^2\right) \end{aligned}$$

$$2x = x\left(1+2x^2\right)$$

Se $x=0$, essa equação é satisfeita e temos o primeiro ponto crítico $P_1 = (0,0)$
Se $x \neq y$, dividimos os dois termos por x

$$\begin{aligned}
2x &= x\left(1+2x^2\right)\\
2 &= 1+2x^2\\
2x^2 &= 1\\
x^2 &= \frac{1}{2}\\
|x| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\\
x &= \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Encontramos os pontos críticos $P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Calculando a Hessiana de f

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2} - y\right) = \frac{2(1+x^2+y^2)-4x^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} = \frac{2-2x^2+2y^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2} - x\right) = \frac{2(1+x^2+y^2)-4y^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} = \frac{2+2x^2-2y^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2} - x\right) = \frac{-4xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} - 1$$

Discriminante (Determinante da Hessiana)

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$$

Classificando o ponto $(0,0)$

$$f_{xx}(0,0) = \left(\frac{2-2x^2+2y^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\right)\Bigg|_{(0,0)} = 2$$

$$f_{yy}(0,0) = \left(\frac{2+2x^2-2y^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\right)\Bigg|_{(0,0)} = 2$$

$$f_{xy}(0,0) = \left(\frac{-4xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} - 1\right)\Bigg|_{(0,0)} = -1$$

$$D(0,0) = 2\times 2 - (-1)^2 = 3 > 0$$

Como $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$, é um **mínimo local**

No ponto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ temos

$$\left(\left(1+x^2+y^2\right)^2\right)\Bigg|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 = 2^2 = 4$$

$$f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right)\Bigg|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{2-1+1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$f_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{2+2x^2-2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right)\Bigg|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{2+1-1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$f_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}-1\right)\Bigg|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{-2}{4}-1=\frac{-3}{2}$$

$$D\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\left(\frac{-3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}=\frac{-8}{4}=-2<0$$

Portanto, é um **ponto de sela**

No ponto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ temos

$$\left(\left(1+x^2+y^2\right)^2\right)\Bigg|_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=2^2=4$$

$$f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right)\Bigg|_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{2-1+1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$f_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{2+2x^2-2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right)\Bigg|_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{2+1-1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$f_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}-1\right)\Bigg|_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{-2}{4}-1=\frac{-3}{2}$$

$$D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\left(\frac{-3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}=\frac{-8}{4}=-2<0$$

Portanto, é um **ponto de sela**

2 [50%] Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ na região fechada imitada $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leq 2, |y| \leq 4\}$

Interior

Derivadas parciais

$$f_x(x,y) = 2x - 2 \qquad f_y(x,y) = 2y - 2$$

Igualando a zero

$$2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$2y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

Ponto crítico é $(1,1)$, como $|1| \leq 2$ e $|1| \leq 4$, o ponto crítico está no interior de R

Valor da função no ponto crítico

$$f(1,1) = \left(x^2 + y^2 - 2x - 2y\right)\Big|_{(1,1)} = 1 + 1 - 2 - 2 = -2$$

A fronteira de R é composta por quatro arestas

$$\begin{aligned} x &= -2 \quad y \in [-4,4] \\ x &= 2 \quad y \in [-4,4] \\ y &= -4 \quad x \in [-2,2] \\ y &= 4 \quad x \in [-2,2] \end{aligned}$$

Aresta $x = 2$

$$g(y) = f(2,y) = 4 + y^2 - 4 - 2y = y^2 - 2y$$

$$g'(y) = 2y - 2$$

cuja raiz é $y = 1$

Então os candidatos a extremos no problema 1D são $y = -4$, $y = 1$ e $y = 4$

Os candidatos no problema 2D são $(2,-4)$, $(2,1)$ e $(2,4)$

Avaliando f

$$f(2,-4) = g(-4) = 16 + 8 = 24$$

$$f(2,1) = g(1) = -1$$

$$f(2,4) = g(4) = 16 - 8 = 8$$

Aresta $x = -2$

$$h(y) = f(-2,y) = 4 + y^2 + 4 - 2y = y^2 - 2y + 8$$

$$h'(y) = 2y - 2$$

com raiz $y = 1$

Então os candidatos a extremos no problema 1D são $y = -4$, $y = 1$ e $y = 4$
Os candidatos no problema 2D são $(-2, -4)$, $(-2, 1)$ e $(-2, 4)$
Avaliando f

$$f(-2, -4) = h(-4) = 16 + 8 + 8 = 32$$

$$f(-2, 1) = h(1) = 1 - 2 + 8 = 7$$

$$f(-2, 4) = h(4) = 16 - 8 + 8 = 16$$

Aresta $y = 4$

$$p(x) = f(x, 4) = x^2 + 16 - 2x - 8 = x^2 - 2x + 8$$

$$p'(x) = 2x - 2$$

com raiz $x = 1$
Então os candidatos a extremos no problema 1D são $x = -2$, $x = 1$ e $x = 2$
Os candidatos no problema 2D são $(-2, 4)$, $(1, 4)$ e $(2, 4)$
Avaliando f

$$f(-2, 4) = p(-2) = 4 + 4 + 8 = 16$$

$$f(1, 4) = p(1) = 1 - 2 + 8 = 7$$

$$f(2, 4) = p(2) = 4 - 4 + 8 = 8$$

Aresta $y = -4$

$$q(x) = f(x, -4) = x^2 + 16 - 2x + 8 = x^2 - 2x + 24$$

$$q'(x) = 2x - 2$$

com raiz $x = 1$
Então os candidatos a extremos no problema 1D são $x = -2$, $x = 1$ e $x = 2$
Os candidatos no problema 2D são $(-2, -4)$, $(1, -4)$ e $(2, -4)$
Avaliando f

$$f(-2, -4) = q(-2) = 4 + 4 + 24 = 32$$

$$f(1, -4) = q(1) = 1 - 2 + 24 = 23$$

$$f(2, -4) = q(2) = 4 - 4 + 24 = 24$$

Comparando

$$\begin{aligned} f(1, 1) &= -2 \\ f(2, 4) &= 8 \\ f(2, -4) &= 24 \\ f(-2, 4) &= 16 \\ f(-2, -4) &= 32 \end{aligned}$$

O mínimo absoluto de f é -2 em $(1, 1)$
O máximo absoluto de f é 32 em $(-2, -4)$