

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [50%] Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = e^{xy} - x^2 - y^2$

Calculando o gradiente

$$f_x(x, y) = ye^{xy} - 2x$$

$$f_y(x, y) = xe^{xy} - 2y$$

Igualando o gradiente ao vetor nulo

$$\begin{cases} ye^{xy} - 2x = 0 \\ xe^{xy} - 2y = 0 \end{cases}$$

rearranjando

$$\begin{cases} 2x = ye^{xy} \\ 2y = xe^{xy} \end{cases}$$

Subtraindo as equações

$$2(x - y) = -(x - y)e^{xy}$$

Caso 1: $x \neq y$, dividimos os dois lados por $x - y$, obtendo $2 = -e^{xy}$ que não possui solução.

Caso 2: $x = y$, a equação $2(x - y) = -(x - y)e^{xy}$ é satisfeita

Substituindo na primeira equação e obtemos

$$2x = ye^{xy}$$

$$2x = xe^{x^2}$$

Se $x = 0$, essa equação é satisfeita e temos o primeiro ponto crítico $P_1 = (0, 0)$

Se $x \neq 0$, dividimos os dois termos por x

$$2 = xe^{x^2}$$

$$2 = e^{x^2}$$

$$\ln(2) = x^2$$

$$|x| = \sqrt{\ln(2)}$$

$$x = \pm\sqrt{\ln(2)}$$

Encontramos os pontos críticos $P_2 = (\sqrt{\ln(2)}, \sqrt{\ln(2)})$ e $P_3 = (-\sqrt{\ln(2)}, -\sqrt{\ln(2)})$

Calculando a Hessiana de f

$$f_{xx}(x, y) = y^2 e^{xy} - 2$$

$$f_{yy}(x, y) = x^2 e^{xy} - 2$$

$$f_{xy}(x, y) = xy e^{xy} + e^{xy}$$

Discriminante (Determinante da Hessiana)

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$$

Classificando o ponto $(0, 0)$

$$f_{xx}(0, 0) = -2$$

$$f_{yy}(0, 0) = -2$$

$$f_{xy}(0, 0) = 1$$

$$D(0, 0) = 4 - 1 = 3 > 0$$

Como $f_{xx}(0, 0) = -2 < 0$, o ponto $(0, 0)$ é um **máximo local**

No ponto $(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2})$

$$f_{xx}(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}) = 2 \ln 2 - 2$$

$$f_{yy}(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}) = 2 \ln 2 - 2$$

$$f_{xy}(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}) = 2 \ln 2 + 2$$

$$D(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}) = (2 \ln 2 - 2)^2 - (2 \ln 2 + 2)^2 < 0$$

Portanto, é um **ponto de sela**

No ponto $(-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2})$

$$f_{xx}(-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2}) = 2 \ln 2 - 2$$

$$f_{yy}(-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2}) = 2 \ln 2 - 2$$

$$f_{xy}(-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2}) = 2 \ln 2 + 2$$

$$D(-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2}) = (2 \ln 2 - 2)^2 - (2 \ln 2 + 2)^2 < 0$$

Portanto, é um **ponto de sela**

2 [50%] Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = y \operatorname{sen}(x)$ na região $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$
Dica: Considere as aproximações $\operatorname{sen}(1) \approx 0,8$, $\operatorname{sen}(2) \approx 0,9$ e $\operatorname{sen}(3) \approx 0,1$

Interior

Derivadas parciais

$$f_x = y \cos(x) \qquad f_y = \operatorname{sen}(x)$$

Pontos críticos no interior

$$y \cos(x) = 0 \qquad \operatorname{sen}(x) = 0$$

Impondo $\operatorname{sen}(x) = 0$ em $x \in [-1, 2]$ temos $x = 0$. A primeira equação se torna

$$y \cos(x) = 0$$

$$y \cos(0) = 0$$

$$y = 0$$

O ponto crítico no interior da região é $(0, 0)$, onde função vale

$$f(0, 0) = 0 \operatorname{sen}(0) = 0$$

Fronteira 1: onde $x = -1$ e $-2 \leq y \leq 2$

$$g(y) = f(-1, y) = y \operatorname{sen}(-1) = -y \operatorname{sen}(1)$$

Como $g'(y) = -\operatorname{sen}(1) \neq 0$ a função $g(y)$ não possui pontos críticos, consideramos apenas os extremos do intervalo $y = -2$ e $y = 2$

$$f(-1, -2) = g(-2) = 2 \operatorname{sen}(1)$$

$$f(-1, 2) = g(2) = -2 \operatorname{sen}(1)$$

Fronteira 2: onde $x = 2$ e $-2 \leq y \leq 2$

$$h(y) = f(2, y) = y \operatorname{sen}(2)$$

Como $h'(y) = \operatorname{sen}(2) \neq 0$ a função $h(y)$ não possui pontos críticos, consideramos apenas os extremos do intervalo $y = -2$ e $y = 2$

$$f(2, -2) = h(-2) = -2 \operatorname{sen}(2)$$

$$f(2, 2) = h(2) = 2 \operatorname{sen}(2)$$

Fronteira 3: onde $y = -2$ e $-1 \leq x \leq 2$

$$p(x) = f(x, -2) = -2 \operatorname{sen}(x)$$

Como $p'(x) = -2 \cos(x)$, impondo $p'(x) = 0$ com $-1 \leq x \leq 2$ temos que $x = \frac{\pi}{2}$ é um ponto crítico

no interior do intervalo. Consideramos os pontos $x = -1$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = 2$

$$f(-1, -2) = p(-1) = -2 \operatorname{sen}(-1) = 2 \operatorname{sen}(1)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}, -2\right) = p\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$$

$$f(2, -2) = p(2) = -2 \operatorname{sen}(2)$$

Fronteira 4: onde $y = 2$ e $-1 \leq x \leq 2$

$$q(x) = f(x, 2) = 2 \operatorname{sen}(x)$$

Como $q'(x) = 2 \cos(x)$, impondo $q'(x) = 0$ com $-1 \leq x \leq 2$ temos que $x = \frac{\pi}{2}$ é um ponto crítico no interior do intervalo. Consideramos os pontos $x = -1$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = 2$

$$f(-1, 2) = q(-1) = 2 \operatorname{sen}(-1) = -2 \operatorname{sen}(1)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}, 2\right) = q\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$f(2, 2) = q(2) = 2 \operatorname{sen}(2)$$

Coletando todos os candidatos a extremo absoluto temos

x	y	$f(x, y)$	\approx
0	0		0,0
-1	-2	$2 \operatorname{sen}(1)$	1,6
-1	2	$-1 \operatorname{sen}(1)$	-0,8
2	-2	$-2 \operatorname{sen}(2)$	-1,8
2	2	$2 \operatorname{sen}(2)$	1,8
-1	-2	$2 \operatorname{sen}(1)$	1,6
$\frac{\pi}{2}$	-2		-2,0
2	-2	$-2 \operatorname{sen}(2)$	-1,8
-1	2	$-2 \operatorname{sen}(1)$	1,6
$\frac{\pi}{2}$	2		2,0
2	2	$2 \operatorname{sen}(2)$	-1,8

O mínimo absoluto é -2 em $\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$

O máximo absoluto é 2 em $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$