CFVVI – Prova 5 – Turma 2

17/12/2025

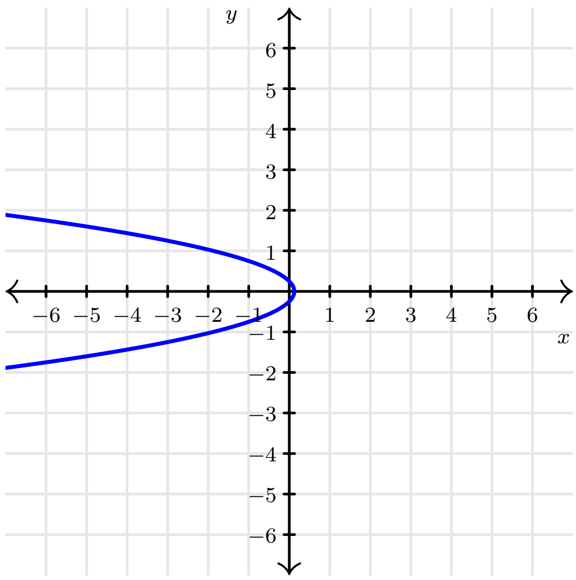
Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [25%] Considere a equação em coordenadas polares $4r = (1+\cos\theta)^{-1}$, transforme-a em coordenadas cartesianas, identifique a cônica obtida e esboce seu gráfico.

$$
\begin{aligned}
4r &= (1+\cos\theta)^{-1} \\
4r &= \frac{1}{1+\cos\theta} \\
4r(1+\cos\theta) &= 1 \\
4r + 4r\cos\theta &= 1 \\
4r + 4x &= 1 \\
4r &= 1-4x \\
16r^2 &= (1-4x)^2 \\
16\left(x^2+y^2\right) &= 1-8x+16x^2 \\
16y^2 &= 1-8x \\
8x &= 1-16y^2 \\
x &= \frac{1}{8}-2y^2
\end{aligned}
$$

A cônica é uma parábola



2 [25%] Determine todas as raízes cúbicas de $z = 4\sqrt{3} - 4i$

Módulo de z

$$|z| = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + (-4)^2} = \sqrt{48+16} = 8$$

Para encontrar o argumento $\varphi = \arg(z)$, usamos o seno e o cosseno do âlgulo

$$\operatorname{sen}(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

portanto $\varphi = \frac{12n-1}{6}\pi$, escolhemos $\varphi = \frac{-\pi}{6}$

$$z = 8\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$$

Pela segunda fórmula de Moivre, as raízes cúbicas são

$$u_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{-\pi/6 + 2k\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{-\pi/6 + 2k\pi}{3}\right)\right) \qquad k = 0, 1, 2$$

Como $\sqrt[3]{8} = 2$, obtemos

$$u_0 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{18}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{18}\right)\right)$$

$$u_1 = 2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{18}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{18}\right)\right)$$

$$u_2 = 2\left(\cos\left(\frac{23\pi}{18}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{23\pi}{18}\right)\right)$$

3 [50%] Determine os pontos candidatos a extremos de $x^2 + \ln y$ com $y > 0$, sujeita à restrição $2x + y = 3$

Queremos os extremos de

$$f(x,y) = x^2 + \ln y \qquad y > 0$$

sujeita à restrição

$$g(x,y) = 2x + y = 3$$

Gradientes

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 1/y \end{pmatrix} \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} 2x &= 2\lambda \\ \frac{1}{y} &= \lambda \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$$

Da primeira equação temos que $x = \lambda$, substituindo na segunda temos

$$\frac{1}{y} = \lambda = x \qquad y = \frac{1}{x}$$

Substituindo na restrição

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 2x + \frac{1}{x} &= 3 \\ 2x^2 + 1 &= 3x \\ 2x^2 - 3x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

Para $x = \dfrac{3+1}{4} = 1$ temos $y = 1$

Para $x = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2}$ temos $y = 2$

Os pontos candidatos a extremos são

$$P_1 = (1,1) \quad \text{e} \quad P_2 = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$