

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [25%] Considere a equação em coordenadas polares $\left(\frac{r}{6}\right)^2 = (4\cos^2\theta + 9\sin^2\theta)^{-1}$, escreva-a em coordenadas cartesianas, identifique a cônica e esboce seu gráfico.

$$\left(\frac{r}{6}\right)^2 = (4\cos^2\theta + 9\sin^2\theta)^{-1}$$

$$\frac{r^2}{36} = \frac{1}{4\cos^2\theta + 9\sin^2\theta}$$

$$r^2 = \frac{36}{4\cos^2\theta + 9\sin^2\theta}$$

$$r^2(4\cos^2\theta + 9\sin^2\theta) = 36$$

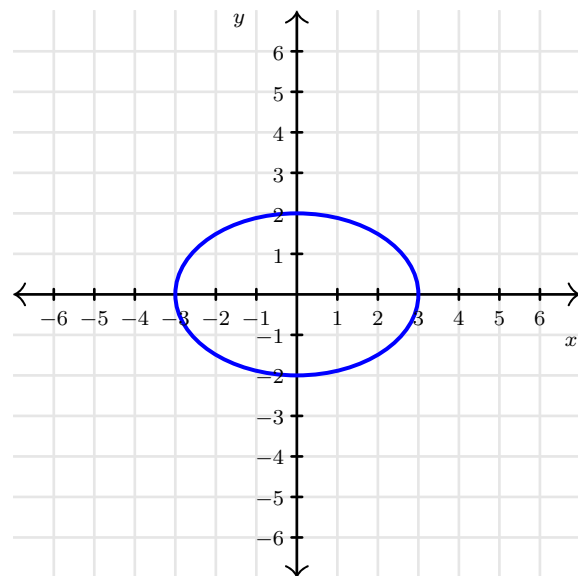
$$4r^2\cos^2\theta + 9r^2\sin^2\theta = 36$$

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

A cônica é uma elipse



2 [25%] Determine todas as raízes cúbicas do número complexo $z = -4(1 + i\sqrt{3})$

O módulo de z é

$$|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 16 \cdot 3} = \sqrt{64} = 8$$

Determinamos o argumento $\varphi = \arg(z)$ resolvendo o sistema

$$\operatorname{sen}(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cos}(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$$

portanto

$$\varphi = \arg(z) = \left(2n - \frac{2}{3}\right)\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Podemos escolher

$$\varphi = -\frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{4\pi}{3}$$

Vou seguir com $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$

Pela segunda fórmula de Moivre, as raízes cúbicas de z são dadas por

$$\begin{aligned} u_k &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + 2k\pi}{3} \right) & k = 0, 1, 2 \\ &= 2 \left(\cos \frac{-2\pi/3 + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{-2\pi/3 + 2k\pi}{3} \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{-2\pi + 6k\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{-2\pi + 6k\pi}{9} \right) \end{aligned}$$

$$u_0 = 2 \left(\cos \frac{-2\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{-2\pi}{9} \right)$$

$$u_1 = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{9} \right)$$

$$u_2 = 2 \left(\cos \frac{10\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{10\pi}{9} \right)$$

3 [50%] Determine os pontos candidatos a extremos de $x^2 + e^y$ sujeita à restrição $x^2 + y = 1$

Queremos os extremos de

$$f(x, y) = x^2 + e^y$$

sujeita à restrição

$$g(x, y) = x^2 + y - 1 = 0$$

Gradientes

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ e^y \end{pmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

O sistema de Lagrange é

$$2x = 2\lambda x$$

$$e^y = \lambda$$

$$x^2 + y = 1$$

Da primeira equação

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1$$

Caso $x = 0$, da restrição

$$y = 1$$

e da segunda equação

$$\lambda = e$$

obtemos o primeiro ponto

$$P_1 = (0, 1)$$

Caso $\lambda = 1$, da segunda equação

$$e^y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

Da restrição

$$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

Encontramos o segundo e terceiro pontos

$$P_2 = (1, 0) \quad P_3 = (-1, 0)$$