

## GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [40%] Determine os pontos candidatos a extremos de  $x^2 + e^y$  sujeita à restrição  $x^2 + y = 1$

Queremos os extremos de

$$f(x, y) = x^2 + e^y$$

sujeita à restrição

$$g(x, y) = x^2 + y - 1 = 0$$

Gradientes

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ e^y \end{pmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

O sistema de Lagrange é

$$2x = 2\lambda x$$

$$e^y = \lambda$$

$$x^2 + y = 1$$

Da primeira equação

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1$$

Caso  $x = 0$ , da restrição

$$y = 1$$

e da segunda equação

$$\lambda = e$$

obtemos o primeiro ponto

$$P_1 = (0, 1)$$

Caso  $\lambda = 1$ , da segunda equação

$$e^y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

Da restrição

$$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

Encontramos o segundo e terceiro pontos

$$P_2 = (1, 0) \quad P_3 = (-1, 0)$$

2 [20%] Seja  $f(x,y) = e^x \ln(1+x^2+y^2)$ . Determine a aproximação linear de  $f$  no ponto  $(0,1)$  e use-a para aproximar  $f(0.05, 0.98)$ .

A aproximação linear é

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Cálculo das derivadas parciais

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} [e^x \ln(1+x^2+y^2)] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [e^x] \ln(1+x^2+y^2) + e^x \frac{\partial}{\partial x} [\ln(1+x^2+y^2)] \\ &= e^x \ln(1+x^2+y^2) + e^x \frac{1}{1+x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial x} (1+x^2+y^2) \\ &= e^x \left( \ln(1+x^2+y^2) + \frac{2x}{1+x^2+y^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} [e^x \ln(1+x^2+y^2)] \\ &= e^x \frac{\partial}{\partial y} [\ln(1+x^2+y^2)] \\ &= e^x \frac{1}{1+x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial y} (1+x^2+y^2) \\ &= \frac{2ye^x}{1+x^2+y^2} \end{aligned}$$

Avaliação em  $(0,1)$

$$\begin{aligned} f(0,1) &= [e^x \ln(1+x^2+y^2)] \Big|_{(0,1)} \\ &= e^0 \ln(1+0^2+1^2) \\ &= \ln 2 \\ f_x(0,1) &= \left[ e^x \left( \ln(1+x^2+y^2) + \frac{2x}{1+x^2+y^2} \right) \right] \Big|_{(0,1)} \\ &= e^0 \left( \ln(1+0^2+1^2) + \frac{2 \times 0}{1+0^2+1^2} \right) \\ &= \ln 2 \\ f_y(0,1) &= \left[ \frac{2ye^x}{1+x^2+y^2} \right] \Big|_{(0,1)} \\ &= \frac{2 \times 1 \times e^0}{1+0^2+1^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

A aproximação linear é

$$\begin{aligned} L(x,y) &= \ln(2) + \ln(2)x + (y-1) \\ &= \ln(2)x + y + (\ln(2) - 1) \end{aligned}$$

Aproximação em  $(0.05, 0.98)$

$$\begin{aligned}L(0.05, 0.98) &= \ln(2) + \ln(2) 0.05 + (0.98 - 1) \\ &= \ln(2) + \ln(2) 0.05 - 0.02 \\ &= 1.05 \ln(2) - 0.02\end{aligned}$$

Com uma calculadora podemos avaliar que

$$\begin{aligned}L(0.05, 0.98) &= 0.7078 \\ f(0.05, 0.98) &= 0.7090\end{aligned}$$

3 [40%] Determine e classifique os pontos críticos da função  $f(x,y) = e^{xy} - x^2 - y^2$

Calculando o gradiente

$$f_x(x,y) = ye^{xy} - 2x$$

$$f_y(x,y) = xe^{xy} - 2y$$

Igualando o gradiente ao vetor nulo

$$\begin{cases} ye^{xy} - 2x = 0 \\ xe^{xy} - 2y = 0 \end{cases}$$

rearranjando

$$\begin{cases} 2x = ye^{xy} \\ 2y = xe^{xy} \end{cases}$$

Subtraindo as equações

$$2(x - y) = -(x - y)e^{xy}$$

Caso 1:  $x \neq y$ , dividimos os dois lados por  $x - y$ , obtendo  $2 = -e^{xy}$  que não possui solução.

Caso 2:  $x = y$ , a equação  $2(x - y) = -(x - y)e^{xy}$  é satisfeita

Substituindo na primeira equação e obtemos

$$2x = ye^{xy}$$

$$2x = xe^{x^2}$$

Se  $x = 0$ , essa equação é satisfeita e temos o primeiro ponto crítico  $P_1 = (0, 0)$

Se  $x \neq 0$ , dividimos os dois termos por  $x$

$$2x = xe^{x^2}$$

$$2 = e^{x^2}$$

$$\ln(2) = x^2$$

$$|x| = \sqrt{\ln(2)}$$

$$x = \pm\sqrt{\ln(2)}$$

Encontramos os pontos críticos  $P_2 = (\sqrt{\ln(2)}, \sqrt{\ln(2)})$  e  $P_3 = (-\sqrt{\ln(2)}, -\sqrt{\ln(2)})$

Calculando a Hessiana de  $f$

$$f_{xx}(x,y) = y^2e^{xy} - 2$$

$$f_{yy}(x,y) = x^2e^{xy} - 2$$

$$f_{xy}(x,y) = xy e^{xy} + e^{xy}$$

Discriminante (Determinante da Hessiana)

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$$

Classificando o ponto  $(0, 0)$

$$f_{xx}(0, 0) = -2$$

$$f_{yy}(0, 0) = -2$$

$$f_{xy}(0, 0) = 1$$

$$D(0, 0) = 4 - 1 = 3 > 0$$

Como  $f_{xx}(0, 0) = -2 < 0$ , o ponto  $(0, 0)$  é um **máximo local**

No ponto  $(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2})$

$$f_{xx}(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}) = 2 \ln 2 - 2$$

$$f_{yy}(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}) = 2 \ln 2 - 2$$

$$f_{xy}(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}) = 2 \ln 2 + 2$$

$$D(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}) = (2 \ln 2 - 2)^2 - (2 \ln 2 + 2)^2 < 0$$

Portanto, é um **ponto de sela**

No ponto  $(-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2})$

$$f_{xx}(-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2}) = 2 \ln 2 - 2$$

$$f_{yy}(-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2}) = 2 \ln 2 - 2$$

$$f_{xy}(-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2}) = 2 \ln 2 + 2$$

$$D(-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2}) = (2 \ln 2 - 2)^2 - (2 \ln 2 + 2)^2 < 0$$

Portanto, é um **ponto de sela**