CFVVI – Exame – Turma 7 12/01/2026

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [40%] Determine os pontos candidatos a extremos de $x^2 + \ln y$ com $y > 0$, sujeita à restrição $2x + y = 3$

Queremos os extremos de

$$f(x,y) = x^2 + \ln y \qquad y > 0$$

sujeita à restrição

$$g(x,y) = 2x + y = 3$$

Gradientes

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 1/y \end{pmatrix} \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} 2x &= 2\lambda \\ \frac{1}{y} &= \lambda \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$$

Da primeira equação temos que $x = \lambda$, substituindo na segunda temos

$$\frac{1}{y} = \lambda = x \qquad y = \frac{1}{x}$$

Substituindo na restrição

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 2x + \frac{1}{x} &= 3 \\ 2x^2 + 1 &= 3x \\ 2x^2 - 3x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

Para $x = \dfrac{3+1}{4} = 1$ temos $y = 1$

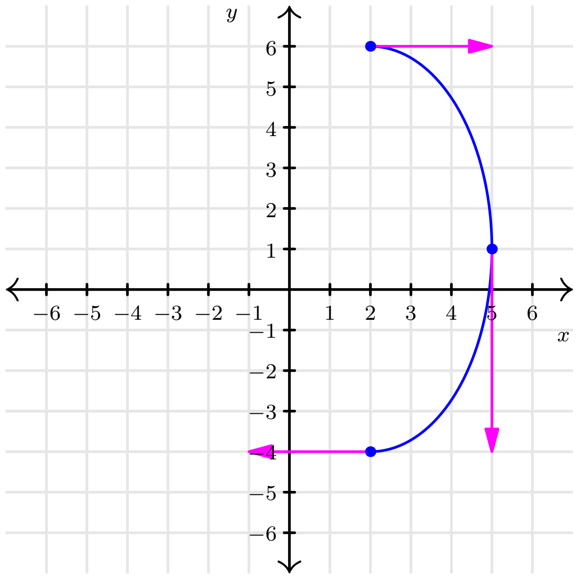
Para $x = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2}$ temos $y = 2$

Os pontos candidatos a extremos são

$$P_1 = (1,1) \qquad \text{e} \qquad P_2 = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

2 [20%] Uma partícula descreve uma trajetória elíptica descrita pelas equações paramétricas

$$x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 2$$
$$y(t) = 5\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 1$$
$$0 \le t \le \pi$$



a) [20%] calcule o vetor tangente à curva

b) [10%] avalie o vetor tangente em $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$ e em $t = \pi$

c) [20%] esboce a curva e os vetores tangentes calculados

a) O vetor tangente é $v(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$

Avaliando cada derivada

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[2 + 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] = 3\frac{d}{dt}\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[1 + 5\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] = 5\frac{d}{dt}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -5\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

Portanto, $v(t) = \begin{pmatrix} 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ -5\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \end{pmatrix}$

b) Avaliando o vetor tangente nos pontos $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$ e em $t = \pi$

$$v(0) = \begin{pmatrix} 3\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) \\ \\ -5\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) \end{pmatrix}\Bigg|_0 = \begin{pmatrix} 3\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \\ -5\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 \\ -5 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) \\ \\ -5\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) \end{pmatrix}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 3\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \\ -5\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,\text{sen}\,(0) \\ \\ -5\cos\,(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 0 \\ -5 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$v(\pi) = \begin{pmatrix} 3\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) \\ \\ -5\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) \end{pmatrix}\Bigg|_{\pi} = \begin{pmatrix} 3\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \pi\right) \\ \\ -5\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,\text{sen}\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) \\ \\ -5\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-1) \\ -5 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Calculando os pontos associados a $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$ e em $t = \pi$

$$x(0) = \left(3\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 2\right)\Bigg|_0 = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 = 3 \times 0 + 2 = 2$$

$$y(0) = \left(5\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 1\right)\Bigg|_0 = 5\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 5 \times 1 + 1 = 6$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(3\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 2\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}} = 3\cos\,(0) + 2 = 3 \times 1 + 2 = 5$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(5\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 1\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}} = 5\,\text{sen}\,(0) + 1 = 5 \times 0 + 1 = 1$$

$$x(\pi) = \left(3\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 2\right)\Bigg|_{\pi} = 3\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2 = 3 \times 0 + 2 = 2$$

$$y(\pi) = \left(5\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 1\right)\Bigg|_{\pi} = 5\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 5(-1) + 1 = -4$$

3 [40%] Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = e^{xy} - x^2 - y^2$

Calculando o gradiente

$$f_x(x,y) = ye^{xy} - 2x$$

$$f_y(x,y) = xe^{xy} - 2y$$

Igualando o gradiente ao vetor nulo

$$\begin{cases} ye^{xy} - 2x = 0 \\ xe^{xy} - 2y = 0 \end{cases}$$

rearranjando

$$\begin{cases} 2x = ye^{xy} \\ 2y = xe^{xy} \end{cases}$$

Subtraindo as equações

$$2(x-y) = -(x-y)e^{xy}$$

Caso 1: $x \neq y$, dividimos os dois lados por $x - y$, obtendo $2 = -e^{xy}$ que não possui solução.
Caso 2: $x = y$, a equação $2(x-y) = -(x-y)e^{xy}$ é satisfeita
Substituindo na primeira equação e obtemos

$$\begin{aligned} 2x &= ye^{xy} \\ 2x &= xe^{x^2} \end{aligned}$$

Se $x = 0$, essa equação é satisfeita e temos o primeiro ponto crítico $P_1 = (0,0)$
Se $x \neq y$, dividimos os dois termos por x

$$\begin{aligned} 2x &= xe^{x^2} \\ 2 &= e^{x^2} \\ \ln(2) &= x^2 \\ |x| &= \sqrt{\ln(2)} \\ x &= \pm\sqrt{\ln(2)} \end{aligned}$$

Encontramos os pontos críticos $P_2 = \left(\sqrt{\ln(2)}, \sqrt{\ln(2)}\right)$ e $P_3 = \left(-\sqrt{\ln(2)}, -\sqrt{\ln(2)}\right)$

Calculando a Hessiana de f

$$f_{xx}(x,y) = y^2e^{xy} - 2$$

$$f_{yy}(x,y) = x^2e^{xy} - 2$$

$$f_{xy}(x,y) = xye^{xy} + e^{xy}$$

Discriminante (Determinante da Hessiana)

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$$

Classificando o ponto $(0,0)$

$$f_{xx}(0,0) = -2$$

$$f_{yy}(0,0) = -2$$

$$f_{xy}(0,0) = 1$$

$$D(0,0) = 4 - 1 = 3 > 0$$

Como $f_{xx}(0,0) = -2 < 0$, **o ponto (0,0) é um máximo local**

No ponto $\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right)$

$$f_{xx}\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right) = 2\ln 2 - 2$$

$$f_{yy}\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right) = 2\ln 2 - 2$$

$$f_{xy}\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right) = 2\ln 2 + 2$$

$$D\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right) = (2\ln 2 - 2)^2 - (2\ln 2 + 2)^2 < 0$$

Portanto, é um **ponto de sela**

No ponto $\left(-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2}\right)$

$$f_{xx}\left(-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2}\right) = 2\ln 2 - 2$$

$$f_{yy}\left(-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2}\right) = 2\ln 2 - 2$$

$$f_{xy}\left(-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2}\right) = 2\ln 2 + 2$$

$$D\left(-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2}\right) = (2\ln 2 - 2)^2 - (2\ln 2 + 2)^2 < 0$$

Portanto, é um **ponto de sela**