CFVVI – Prova 1 – Turma 3 01/04/2026

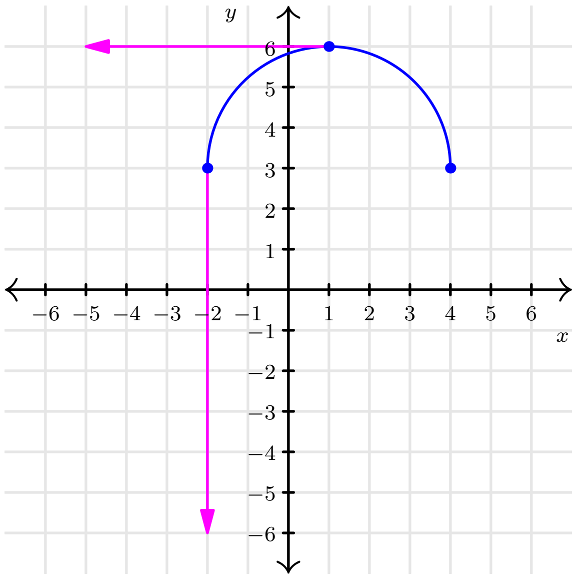
Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens, escreva ao menos uma, e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [50%] Uma partícula descreve uma trajetória circular descrita pelas equações paramétricas

$$x(t) = 3\cos\left(t^2\right) + 1$$
$$y(t) = 3\,\mathrm{sen}\left(t^2\right) + 3$$
$$0 \leq t \leq \sqrt{\pi}$$

a) [10%] determine on pontos onde da curva associados com
$$t = 0,\ t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ e } t = \sqrt{\pi}$$
b) [15%] calcule a expressão para o vetor tangente à curva
c) [15%] avalie o vetor tangente em
$$t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ e } t = \sqrt{\pi}$$
d) [10%] esboce a curva e os vetores tangentes calculados



Apenas para esboçar os vetores, utilize as aproximações grosseiras $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1$ *e* $\sqrt{\pi} \approx \frac{3}{2}$

a) Calculando os pontos associados a $t = 0$, $t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ e em $t = \sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned} x(0) &= \left(3\cos\left(t^2\right) + 1\right)\Big|_0 \\ &= 3\cos(0) + 1 \\ &= 3 \times 1 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= \left(3\,\mathrm{sen}\left(t^2\right) + 3\right)\Big|_0 \\ &= 3\,\mathrm{sen}(0) + 3 \\ &= 3 \times 0 + 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$x\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \left(3\cos\left(t^2\right)+1\right)\Big|_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$
$$= 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+1$$
$$= 3\times 0+1$$
$$= 1$$

$$y\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \left(3\,\mathrm{sen}\left(t^2\right)+3\right)\Big|_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$
$$= 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)+3$$
$$= 3\times 1+3$$
$$= 6$$

$$x\left(\sqrt{\pi}\right) = \left(3\cos\left(t^2\right)+1\right)\Big|_{\sqrt{\pi}}$$
$$= 3\cos(\pi)+1$$
$$= 3(-1)+1$$
$$= -2$$

$$y\left(\sqrt{\pi}\right) = \left(3\,\mathrm{sen}\left(t^2\right)+3\right)\Big|_{\sqrt{\pi}}$$
$$= 3\,\mathrm{sen}(\pi)+3$$
$$= 3\times 0+3$$
$$= 3$$

b) O vetor tangente é $v(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$

Avaliando cada derivada

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[3\cos\left(t^2\right)+1\right]$$
$$= 3\frac{d}{dt}\left[\cos\left(t^2\right)\right]$$
$$= -3\,\mathrm{sen}\left(t^2\right)\frac{d}{dt}\left(t^2\right)$$
$$= -3\,\mathrm{sen}\left(t^2\right)2t$$
$$= -6t\,\mathrm{sen}\left(t^2\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[3\,\mathrm{sen}\left(t^2\right)+3\right]$$
$$= 3\frac{d}{dt}\left[\mathrm{sen}\left(t^2\right)\right]$$
$$= 3\cos\left(t^2\right)\frac{d}{dt}\left(t^2\right)$$
$$= 3\cos\left(t^2\right)2t$$
$$= 6t\cos\left(t^2\right)$$

concluímos que, $v(t) = \begin{pmatrix} -6t\,\mathrm{sen}\left(t^2\right) \\ 6t\cos\left(t^2\right) \end{pmatrix}$

c) Avaliando o vetor tangente nos pontos $t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ e $t = \sqrt{\pi}$

$$v\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \begin{pmatrix} -6t\,\mathrm{sen}\left(t^2\right) \\ 6t\cos\left(t^2\right) \end{pmatrix}\Bigg|_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$
$$= \begin{pmatrix} -6\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 6\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -6\sqrt{\frac{\pi}{2}}\times 1 \\ 6\sqrt{\frac{\pi}{2}}\times 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -6\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v\left(\sqrt{\pi}\right) = \begin{pmatrix} -6t\,\mathrm{sen}\left(t^2\right) \\ 6t\cos\left(t^2\right) \end{pmatrix}\Bigg|_{\sqrt{\pi}}$$
$$= \begin{pmatrix} -6\sqrt{\pi}\,\mathrm{sen}(\pi) \\ 6\sqrt{\pi}\cos(\pi) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -6\sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

2 [50%] Considerando a função $f(x,y) = \ln\left(9 - x^2 + y^2\right)$

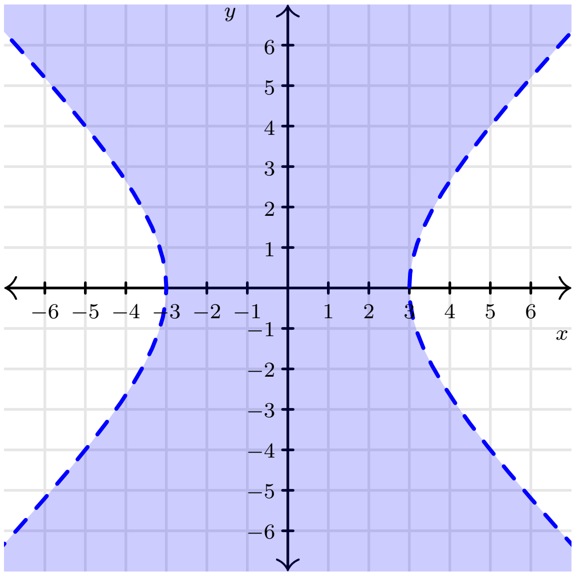
(a) [15%] determine o domínio de f

(b) [15%] esboce o domínio

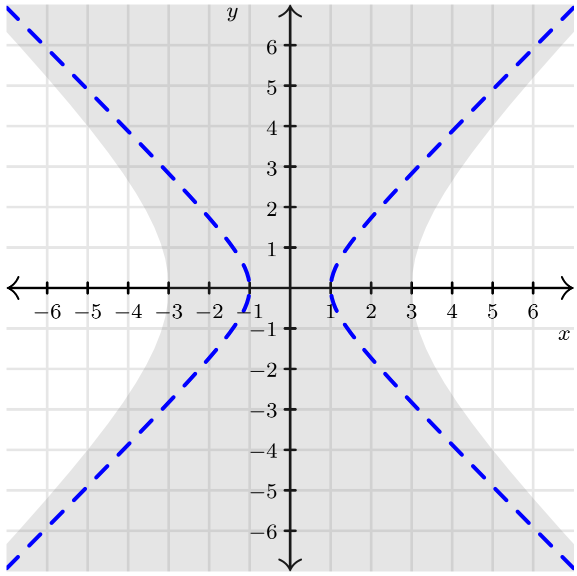
(c) [10%] determine a curva de nível que passa pelo ponto $(1,0)$

(d) [10%] esboce a curva de nível que passa pelo ponto $(1,0)$

Domínio



Curva de nível



a) Não podemos calcular logaritmo de um número negativo ou do zero, portanto, o domínio de f é o conjunto de todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\begin{aligned} 9 - x^2 + y^2 &> 0 \\ x^2 - y^2 &< 9 \\ \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{3^2} &< 1 \end{aligned}$$

ou seja, os pontos "entre os lados" da hipérbole. Assim, o domínio é

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 - y^2 < 9\}$$

c) A curva de nível que passa pelo ponto $(1,0)$ tem o valor

$$c = f(1,0) = \ln\left(9 - x^2 + y^2\right)\Big|_{(1,0)} = \ln\left(9 - 1^2 + 0^2\right) = \ln 8$$

A curva de nível associada é

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \ln 8 \\ \ln\left(9 - x^2 + y^2\right) &= \ln 8 \\ 9 - x^2 + y^2 &= e^{\ln 8} \end{aligned}$$

$$-x^2 + y^2 = 8 - 9$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

Que é uma hipérbole.