

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens, escreva ao menos uma, e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [50%] Uma partícula descreve uma trajetória circular descrita pelas equações paramétricas

$$x(t) = 3 \operatorname{sen}(t^2) + 3$$

$$y(t) = 3 \cos(t^2) + 1$$

$$0 \leq t \leq \sqrt{\pi}$$

a) [10%] determine os pontos onde da curva associados com

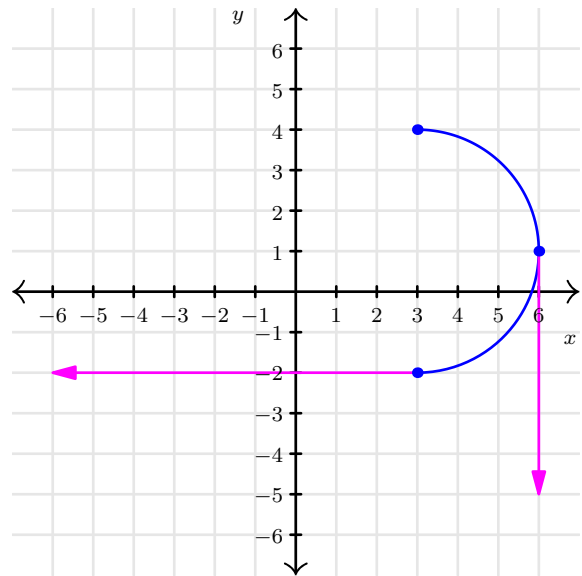
$$t = 0, t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ e } t = \sqrt{\pi}$$

b) [15%] calcule a expressão para o vetor tangente à curva

c) [15%] avalie o vetor tangente em

$$t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ e } t = \sqrt{\pi}$$

d) [10%] esboce a curva e os vetores tangentes calculados



Apenas para esboçar os vetores, utilize as aproximações grosseiras $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1$ e $\sqrt{\pi} \approx \frac{3}{2}$

a) Calculando os pontos associados a $t = 0$, $t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ e em $t = \sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned} x(0) &= \left(3 \operatorname{sen}(t^2) + 3 \right) \Big|_0 \\ &= 3 \operatorname{sen}(0) + 3 \\ &= 3 \times 0 + 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= \left(3 \cos(t^2) + 1 \right) \Big|_0 \\ &= 3 \cos(0) + 1 \\ &= 3 \times 1 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) &= \left(3 \operatorname{sen}\left(t^2\right)+3\right)\Big|_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \\
&= 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)+3 \\
&= 3 \times 1+3 \\
&= 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) &= \left(3 \cos\left(t^2\right)+1\right)\Big|_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \\
&= 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+1 \\
&= 3 \times 0+1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(\sqrt{\pi}) &= \left(3 \operatorname{sen}\left(t^2\right)+3\right)\Big|_{\sqrt{\pi}} \\
&= 3 \operatorname{sen}(\pi)+3 \\
&= 3 \times 0+3 \\
&= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(\sqrt{\pi}) &= \left(3 \cos\left(t^2\right)+1\right)\Big|_{\sqrt{\pi}} \\
&= 3 \cos(\pi)+1 \\
&= 3(-1)+1 \\
&= -2
\end{aligned}$$

b) O vetor tangente é $v(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$

Avaliando cada derivada

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[3 \operatorname{sen}\left(t^2\right)+3\right] \\
&= 3 \frac{d}{dt}\left[\operatorname{sen}\left(t^2\right)\right] \\
&= 3 \cos\left(t^2\right) \frac{d}{dt}\left(t^2\right) \\
&= 3 \cos\left(t^2\right) 2t \\
&= 6t \cos\left(t^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[3 \cos\left(t^2\right)+1\right] \\
&= 3 \frac{d}{dt}\left[\cos\left(t^2\right)\right] \\
&= -3 \operatorname{sen}\left(t^2\right) \frac{d}{dt}\left(t^2\right) \\
&= -3 \operatorname{sen}\left(t^2\right) 2t \\
&= -6t \operatorname{sen}\left(t^2\right)
\end{aligned}$$

concluimos que, $v(t) = \begin{pmatrix} 6t \cos\left(t^2\right) \\ -6t \operatorname{sen}\left(t^2\right) \end{pmatrix}$

c) Avaliando o vetor tangente nos pontos $t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ e $t = \sqrt{\pi}$

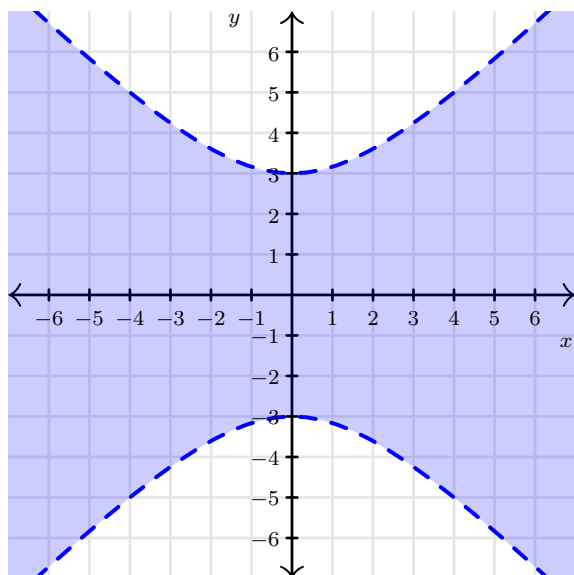
$$\begin{aligned}
v\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) &= \begin{pmatrix} 6t \cos\left(t^2\right) \\ -6t \operatorname{sen}\left(t^2\right) \end{pmatrix}\Big|_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \\
&= \begin{pmatrix} 6\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ -6\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6\sqrt{\frac{\pi}{2}} \times 0 \\ -6\sqrt{\frac{\pi}{2}} \times 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -6\sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(\sqrt{\pi}) &= \begin{pmatrix} 6t \cos\left(t^2\right) \\ -6t \operatorname{sen}\left(t^2\right) \end{pmatrix}\Big|_{\sqrt{\pi}} \\
&= \begin{pmatrix} 6\sqrt{\pi} \cos(\pi) \\ -6\sqrt{\pi} \operatorname{sen}(\pi) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -6\sqrt{\pi} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

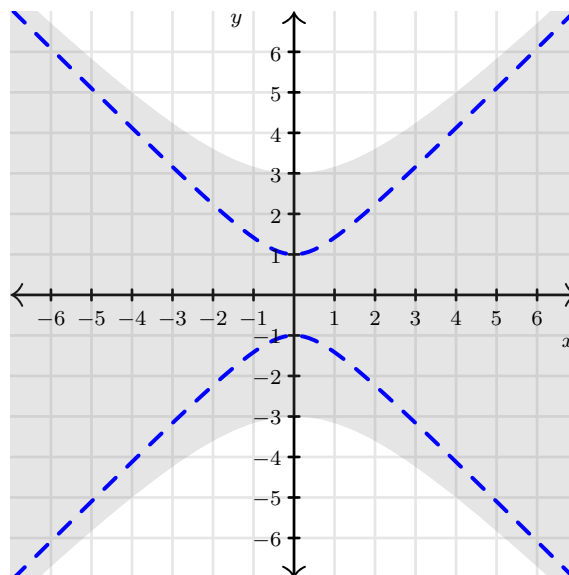
2 [50%] Considerando a função $f(x, y) = \ln(9 + x^2 - y^2)$

- (a) [15%] determine o domínio de f
- (b) [15%] esboce o domínio
- (c) [10%] determine a curva de nível que passa pelo ponto $(0, 1)$
- (d) [10%] esboce a curva de nível que passa pelo ponto $(0, 1)$

Domínio



Curva de nível



a) Não podemos calcular logaritmo de um número negativo ou do zero, portanto, o domínio de f é o conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\begin{aligned} 9 + x^2 - y^2 &> 0 \\ -x^2 + y^2 &< 9 \\ \frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{3^2} &< 1 \end{aligned}$$

ou seja, os pontos “entre os lados” da hipérbole. Assim, o domínio é

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 < 9\}$$

c) A curva de nível que passa pelo ponto $(0, 1)$ tem o valor

$$c = f(0, 1) = \ln(9 + x^2 - y^2) \Big|_{(0,1)} = \ln(9 + 0^2 - 1^2) = \ln 8$$

A curva de nível associada é

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \ln 8 \\ \ln(9 + x^2 - y^2) &= \ln 8 \\ 9 + x^2 - y^2 &= e^{\ln 8} \end{aligned}$$

$$x^2 - y^2 = 8 - 9$$

$$y^2 - x^2 = 1$$

Que é uma hipérbole.