

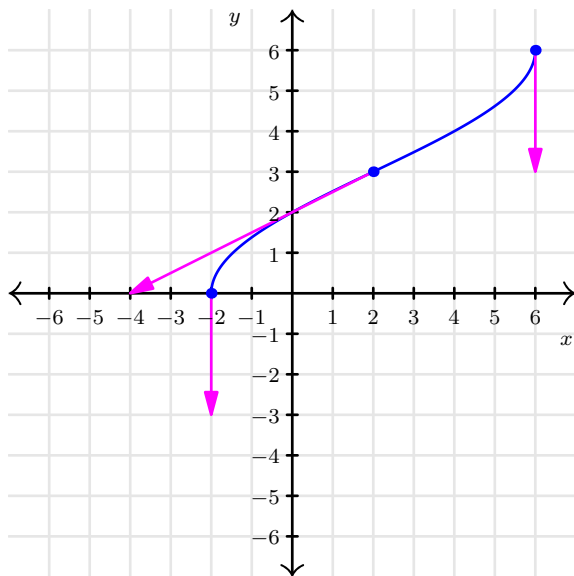
GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens, escreva ao menos uma, e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [50%] Uma partícula descreve uma trajetória senoidal descrita pelas equações paramétricas

$$x(t) = 4 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 2 \quad y(t) = 6 - 3t \quad 0 \leq t \leq 2$$

- a) [10%] determine os pontos onde da curva associados com $t = 0$, $t = 1$ e em $t = 2$
- b) [15%] calcule a expressão para o vetor tangente à curva
- c) [15%] avalie o vetor tangente em $t = 0$, $t = 1$ e em $t = 2$
- d) [10%] esboce a curva e os vetores tangentes calculados (considere $\pi \approx 3$)



- a) Calculando os pontos associados a $t = 0$, $t = 1$ e em $t = 2$

$$\begin{aligned} x(0) &= \left(4 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 2\right) \Big|_0 \\ &= 4 \cos\left(\frac{\pi \times 0}{2}\right) + 2 \\ &= 4 \times 1 + 2 \\ &= 6 \end{aligned} \quad \begin{aligned} y(0) &= (6 - 3t) \Big|_0 \\ &= 6 - 3 \times 0 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x(1) &= \left(4 \cos \left(\frac{\pi t}{2} \right) + 2 \right) \Big|_1 \\
 &= 4 \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + 2 \\
 &= 4 \times 0 + 2 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(1) &= (6 - 3t) \Big|_1 \\
 &= 6 - 3 \times 1 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x(2) &= \left(4 \cos \left(\frac{\pi t}{2} \right) + 2 \right) \Big|_2 \\
 &= 4 \cos \left(\frac{\pi \times 2}{2} \right) + 2 \\
 &= 4(-1) + 2 \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(2) &= (6 - 3t) \Big|_2 \\
 &= 6 - 3 \times 2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

b) O vetor tangente é $v(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$

Avaliando cada derivada

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[4 \cos \left(\frac{\pi t}{2} \right) + 2 \right] \\
 &= -4 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi t}{2} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi t}{2} \right) \\
 &= -4 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi t}{2} \right) \frac{\pi}{2} \\
 &= -2\pi \operatorname{sen} \left(\frac{\pi t}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} [6 - 3t] = -3$$

Portanto, $v(t) = \begin{pmatrix} -2\pi \operatorname{sen} \left(\frac{\pi t}{2} \right) \\ -3 \end{pmatrix}$

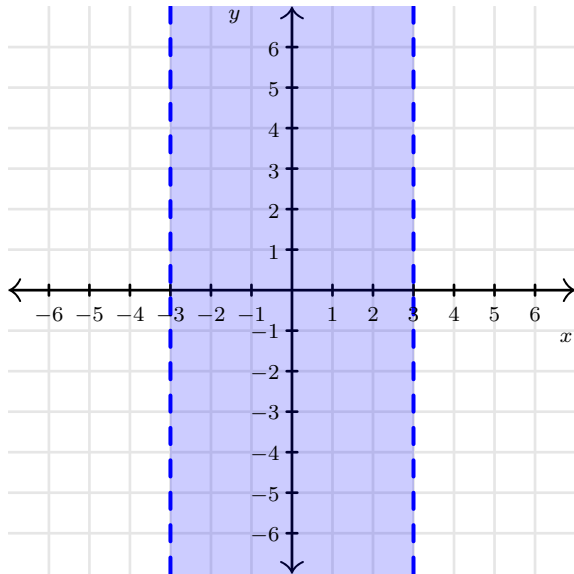
c) Avaliando o vetor tangente nos pontos $t = 0$, $t = 1$ e em $t = 2$

$$\begin{aligned}
 v(0) &= \begin{pmatrix} -2\pi \operatorname{sen} \left(\frac{\pi t}{2} \right) \\ -3 \end{pmatrix} \Big|_0 & v(1) &= \begin{pmatrix} -2\pi \operatorname{sen} \left(\frac{\pi t}{2} \right) \\ -3 \end{pmatrix} \Big|_1 & v(2) &= \begin{pmatrix} -2\pi \operatorname{sen} \left(\frac{\pi t}{2} \right) \\ -3 \end{pmatrix} \Big|_2 \\
 &= \begin{pmatrix} -2\pi \operatorname{sen}(0) \\ -3 \end{pmatrix} & & = \begin{pmatrix} -2\pi \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ -3 \end{pmatrix} & & = \begin{pmatrix} -2\pi \operatorname{sen}(\pi) \\ -3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -2\pi \times 0 \\ -3 \end{pmatrix} & & = \begin{pmatrix} -2\pi \times 1 \\ -3 \end{pmatrix} & & = \begin{pmatrix} -2\pi \times 0 \\ -3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} & & = \begin{pmatrix} -2\pi \\ -3 \end{pmatrix} & & = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

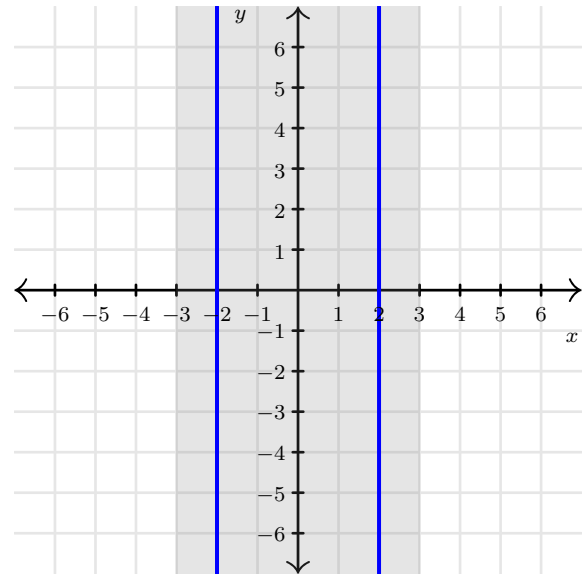
2 [50%] Considerando a função $f(x, y) = \sqrt{\frac{2}{9 - x^2}}$

- (a) [15%] determine o domínio de f
- (b) [15%] esboce o domínio
- (c) [10%] determine a curva de nível que passa pelo ponto $(2, 2)$
- (d) [10%] esboce a curva de nível que passa pelo ponto $(2, 2)$

Domínio



Curva de nível



a) Não podemos calcular a raiz quadrada de um número negativo e não podemos dividir por zero, portanto, o domínio de f é o conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\frac{2}{9 - x^2} \geq 0 \quad \text{e} \quad 9 - x^2 \text{ não é zero}$$

portanto

$$\begin{aligned} 9 - x^2 &> 0 \\ -x^2 &> -9 \\ x^2 &< 9 \\ |x| &< \sqrt{9} = 3 \\ -3 &< x < 3 \end{aligned}$$

ou seja, os pontos entre as retas verticais $x = -3$ e $x = 3$. Assim, o domínio é

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 < x < 3\}$$

c) A curva de nível que passa pelo ponto $(2, 2)$ tem o valor

$$c = f(2, 2) = \sqrt{\frac{2}{9 - x^2}} \Big|_{(2,2)} = \sqrt{\frac{2}{9 - 2^2}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

A curva de nível associada é

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{9-x^2}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\frac{2}{9-x^2} = \frac{2}{5}$$

$$9-x^2 = 5$$

$$-x^2 = 5 - 9 = -4$$

$$x^2 = 4$$

$$|x| = 2$$

$$x = \pm 2$$

A curva de nível é o par de retas verticais

$$x = 2 \quad \text{e} \quad x = -2$$