CFVVI – Prova 1 – Turma 8 01/04/2026

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens, escreva ao menos uma, e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [50%] Uma partícula descreve uma trajetória senoidal descrita pelas equações paramétricas

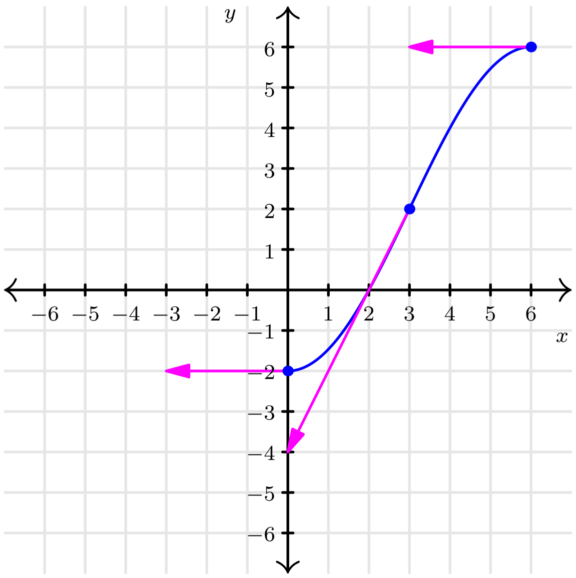
$$x(t) = 6 - 3t \qquad y(t) = 4\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 2 \qquad 0 \leq t \leq 2$$

a) [10%] determine on pontos onde da curva associados com $t = 0$, $t = 1$ e em $t = 2$

b) [15%] calcule a expressão para o vetor tangente à curva

c) [15%] avalie o vetor tangente em $t = 0$, $t = 1$ e em $t = 2$

d) [10%] esboce a curva e os vetores tangentes calculados (considere $\pi \approx 3$)



a) Calculando os pontos associados a $t = 0$, $t = 1$ e em $t = 2$

$$x(0) = (6 - 3t)\Big|_0 = 6 - 3 \times 0 = 6$$

$$y(0) = \left(4\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 2\right)\Bigg|_0 = 4\cos\left(\frac{\pi \times 0}{2}\right) + 2 = 4 \times 1 + 2 = 6$$

$$
\begin{aligned}
x(1) &= (6-3t)\Big|_1 \\
&= 6 - 3\times 1 \\
&= 3
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
y(1) &= \left(4\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)+2\right)\Bigg|_1 \\
&= 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+2 \\
&= 4\times 0+2 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(2) &= (6-3t)\Big|_2 \\
&= 6 - 3\times 2 \\
&= 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
y(2) &= \left(4\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)+2\right)\Bigg|_2 \\
&= 4\cos\left(\frac{\pi\times 2}{2}\right)+2 \\
&= 4(-1)+2 \\
&= -2
\end{aligned}
$$

b) O vetor tangente é $v(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$

Avaliando cada derivada

$$
\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[6-3t\right] = -3
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[4\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)+2\right] \\
&= -4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi t}{2}\right) \\
&= -4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)\frac{\pi}{2} \\
&= -2\pi\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Portanto, $v(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ -2\pi\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) \end{pmatrix}$

c) Avaliando o vetor tangente nos pontos $t=0$, $t=1$ e em $t=2$

$$
\begin{aligned}
v(0) &= \begin{pmatrix} -3 \\[2ex] -2\pi\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) \end{pmatrix}\Bigg|_0 \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\[2ex] -2\pi\,\mathrm{sen}\left(0\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\ -2\pi\times 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
v(1) &= \begin{pmatrix} -3 \\[2ex] -2\pi\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) \end{pmatrix}\Bigg|_1 \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\[2ex] -2\pi\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\[2ex] -2\pi\times 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\ -2\pi \end{pmatrix}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
v(2) &= \begin{pmatrix} -3 \\[2ex] -2\pi\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) \end{pmatrix}\Bigg|_2 \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\[2ex] -2\pi\,\mathrm{sen}\left(\pi\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\[2ex] -2\pi\times 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2 [50%] Considerando a função $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{2}{9-y^2}}$

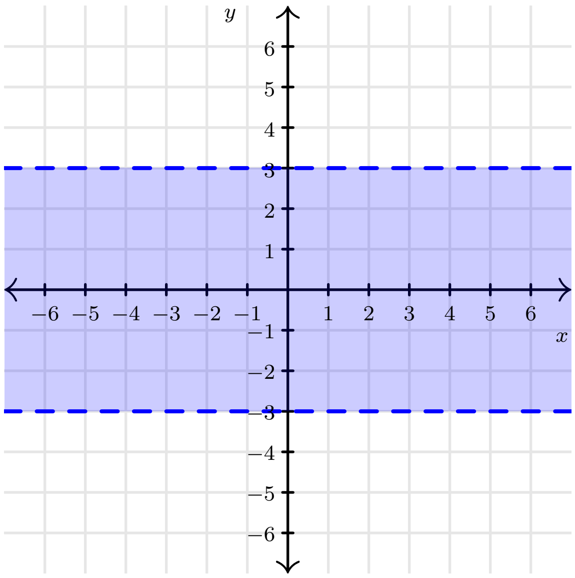
(a) [15%] determine o domínio de f

(b) [15%] esboce o domínio

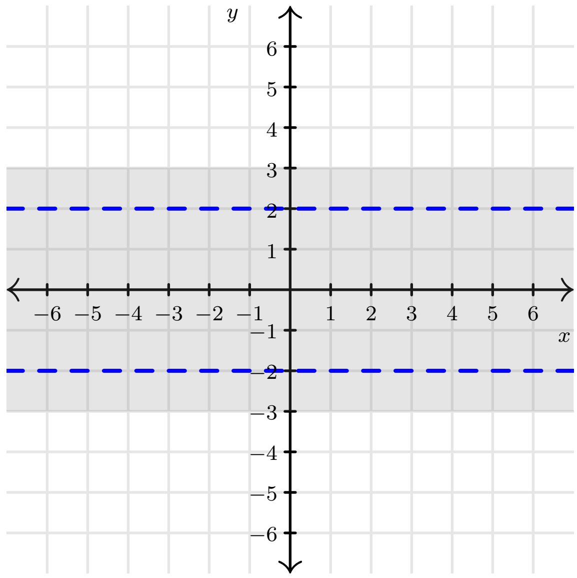
(c) [10%] determine a curva de nível que passa pelo ponto $(2,2)$

(d) [10%] esboce a curva de nível que passa pelo ponto $(2,2)$

Domínio



Curva de nível



a) Não podemos calcular a raiz quadrada de um número negativo e não podemos dividir por zero, portanto, o domínio de f é o conjunto de todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\frac{2}{9-y^2} \geq 0 \qquad \text{e} \qquad 9 - y^2 \text{ não é zero}$$

portanto

$$\begin{aligned} 9 - y^2 &> 0 \\ -y^2 &> -9 \\ y^2 &< 9 \\ |y| &< \sqrt{9} = 3 \\ -3 < y &< 3 \end{aligned}$$

ou seja, os pontos entre as retas horizontais $y = -3$ e $y = 3$. Assim, o domínio é

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ / \ \ -3 < y < 3\right\}$$

c) A curva de nível que passa pelo ponto $(2,2)$ tem o valor

$$c = f(2,2) = \sqrt{\frac{2}{9-y^2}}\bigg|_{(2,2)} = \sqrt{\frac{2}{9-2^2}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

A curva de nível associada é

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \sqrt{\frac{2}{5}} \\
\sqrt{\frac{2}{9-y^2}} &= \sqrt{\frac{2}{5}} \\
\frac{2}{9-y^2} &= \frac{2}{5} \\
9-y^2 &= 5 \\
-y^2 &= 5-9=-4 \\
y^2 &= 4 \\
|y| &= 2 \\
y &= \pm 2
\end{aligned}
$$

A curva de nível é o par de retas horizontais

$$y = 2 \qquad \text{e} \qquad y = -2$$