

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens, escreva ao menos uma, e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

Atenção: a aplicação das regras do produto ou do quociente em casos nos quais um dos termos é constante **será considerada incorreta**, por evidenciar compreensão inadequada das regras de derivação.

1 [25%] Calcule o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{(x-1)(y+1)}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$, ou mostre que ele não existe

Atenção: os caminhos precisam passar pelo ponto $(1, -1)$

Considerando o caminho $x = 1$ temos

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{(x-1)(y+1)}{(x-1)^2 + (y+1)^2} \Big|_{x=1} \\ &= \frac{(1-1)(y+1)}{(1-1)^2 + (y+1)^2} \\ &= \frac{0}{(y+1)^2} \\ &= 0 \quad \forall y \neq -1 \end{aligned}$$

$$L_1 = \lim_{y \rightarrow -1} g(y) = \lim_{y \rightarrow -1} 0 = 0$$

Considerando o caminho $y = x - 2$ temos

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{(x-1)(y+1)}{(x-1)^2 + (y+1)^2} \Big|_{y=x-2} \\ &= \frac{(x-1)(x-2+1)}{(x-1)^2 + (x-2+1)^2} \\ &= \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)^2 + (x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \quad \forall x \neq 1 \end{aligned}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

O limite não existe, pois assume valores diferentes em cada caminho

2 [25%] Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ para $f(x, y) = x^2 \ln(xy) + e^{xy} + \text{sen}(xy)$, na ordem indicada pela notação

Como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Primeiro calculamos a derivada de f por y

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(x^2 \ln(xy) + e^{xy} + \text{sen}(xy) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(x^2 \ln(xy) \right) + \frac{\partial}{\partial y} (e^{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\text{sen}(xy)) \\ &= x^2 \frac{\partial}{\partial y} (\ln(xy)) + e^{xy} \frac{\partial}{\partial y} (xy) + \cos(xy) \frac{\partial}{\partial y} (xy) \\ &= x^2 \frac{1}{xy} \frac{\partial}{\partial y} (xy) + e^{xy} x + \cos(xy) x \\ &= \frac{x^2}{y} + x e^{xy} + x \cos(xy) \end{aligned}$$

Calculamos agora a derivada mista

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2}{y} + x e^{xy} + x \cos(xy) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2}{y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (x e^{xy}) + \frac{\partial}{\partial x} (x \cos(xy)) \\ &= \frac{1}{y} \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial x} e^{xy} + x \frac{\partial e^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial x} \cos(xy) + x \frac{\partial}{\partial x} (\cos(xy)) \\ &= \frac{2x}{y} + e^{xy} + x e^{xy} \frac{\partial xy}{\partial x} + \cos(xy) + x (-\text{sen}(xy)) \frac{\partial xy}{\partial x} \\ &= \frac{2x}{y} + e^{xy} + x y e^{xy} + \cos(xy) - x y \text{sen}(xy) \end{aligned}$$

3 [25%] Use a regra da cadeia para calcular $\frac{dz}{dt}$, onde $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = e^{t^2}$, $y = \sin t$

Notamos que $z = z(x, y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$, portanto pela regra da cadeia temos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Calculando cada derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln(x^2 + y^2) \right) \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) \\ &= \frac{2x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln(x^2 + y^2) \right) \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) \\ &= \frac{2y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{de^{t^2}}{dt} = e^{t^2} \frac{dt^2}{dt} = e^{t^2} 2t = 2te^{t^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d \sin t}{dt} = \cos t$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{2x}{x^2 + y^2} 2te^{t^2} + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos t \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} (x2te^{t^2} + y \cos t) \\ &= \frac{2}{(e^{t^2})^2 + (\sin t)^2} [e^{t^2} 2te^{t^2} + \sin t \cos t] \\ &= \frac{2}{e^{2t^2} + \sin^2 t} [2te^{2t^2} + \sin t \cos t] \end{aligned}$$

4 [25%] Use derivação implícita para avaliar $\frac{dy}{dx}$, sabendo que a equação $x^2 + y^2 + e^{xy} = \ln(x+y)$ define y como função de x

Vamos usar a fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

com

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + e^{xy} - \ln(x + y)$$

Calculando as derivadas parciais

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial F}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + e^{xy} - \ln(x + y)) \\ &= \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial x} + \frac{\partial e^{xy}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (\ln(x + y)) \\ &= 2x + 0 + e^{xy} \frac{\partial xy}{\partial x} - \frac{1}{x + y} \frac{\partial}{\partial x} (x + y) \\ &= 2x + ye^{xy} - (x + y)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{\partial F}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + e^{xy} - \ln(x + y)) \\ &= \frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial y^2}{\partial y} + \frac{\partial e^{xy}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (\ln(x + y)) \\ &= 0 + 2y + e^{xy} \frac{\partial xy}{\partial y} - \frac{1}{x + y} \frac{\partial}{\partial y} (x + y) \\ &= 2y + xe^{xy} - (x + y)^{-1} \end{aligned}$$

Substituindo na fórmula temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x + ye^{xy} - (x + y)^{-1}}{2y + xe^{xy} - (x + y)^{-1}}$$