

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens, escreva ao menos uma, e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

Atenção: a aplicação das regras do produto ou do quociente em casos nos quais um dos termos é constante **será considerada incorreta**, por evidenciar compreensão inadequada das regras de derivação.

1 [25%] Calcule o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)^2 - y^2}{(x-1)^2 + y^2}$, ou mostre que ele não existe

Atenção: os caminhos precisam passar pelo ponto $(1, 0)$

Considerando o caminho $x = 1$ temos

$$g(y) = \frac{(x-1)^2 - y^2}{(x-1)^2 + y^2} \Big|_{x=1} = \frac{(1-1)^2 - y^2}{(1-1)^2 + y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1 \quad \forall y \neq 0$$

$$L_1 = \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1$$

Considerando o caminho $y = 0$ temos

$$h(x) = \frac{(x-1)^2 - y^2}{(x-1)^2 + y^2} \Big|_{y=0} = \frac{(x-1)^2 - 0^2}{(x-1)^2 + 0^2} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = 1 \quad \forall x \neq 1$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1$$

O limite não existe, pois assume valores diferentes em cada caminho

2 [25%] Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ para $f(x, y) = y^2 \sqrt{x^2 + 4} + x \ln(y) + e^{xy}$, na ordem indicada pela notação

Como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Primeiro calculamos a derivada de f por y

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \sqrt{x^2 + 4} + x \ln(y) + e^{xy} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \sqrt{x^2 + 4} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (x \ln(y)) + \frac{\partial}{\partial y} (e^{xy}) \\ &= \sqrt{x^2 + 4} \frac{\partial y^2}{\partial y} + x \frac{\partial \ln(y)}{\partial y} + e^{xy} \frac{\partial xy}{\partial y} \\ &= \sqrt{x^2 + 4} 2y + x \frac{1}{y} + e^{xy} x \\ &= 2y \sqrt{x^2 + 4} + \frac{x}{y} + x e^{xy} \end{aligned}$$

Calculamos agora a derivada mista

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(2y \sqrt{x^2 + 4} + \frac{x}{y} + x e^{xy} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(2y \sqrt{x^2 + 4} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (x e^{xy}) \\ &= 2y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 4)^{1/2} + \frac{1}{y} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial x} e^{xy} + x \frac{\partial e^{xy}}{\partial x} \\ &= 2y \frac{1}{2} (x^2 + 4)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 4) + \frac{1}{y} + e^{xy} + x e^{xy} \frac{\partial xy}{\partial x} \\ &= y \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} 2x + \frac{1}{y} + e^{xy} + x e^{xy} y \\ &= \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + 4}} + \frac{1}{y} + (1 + xy) e^{xy} \end{aligned}$$

3 [25%] Use a regra da cadeia para calcular $\frac{dz}{dt}$, onde $z = \sqrt{1 + x^2y}$, $x = \cos(t^2)$, $y = e^{2t}$

Notamos que $z = z(x, y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$, portanto pela regra da cadeia temos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Calculando cada derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{1 + x^2y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(1 + x^2y \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + x^2y \right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} \left(1 + x^2y \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2y}} 2xy \\ &= \frac{xy}{\sqrt{1 + x^2y}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{1 + x^2y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(1 + x^2y \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + x^2y \right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial y} \left(1 + x^2y \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2y}} x^2 \\ &= \frac{x^2}{2\sqrt{1 + x^2y}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \cos(t^2) \\ &= -\operatorname{sen}(t^2) \frac{dt^2}{dt} \\ &= -2t \operatorname{sen}(t^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{de^{2t}}{dt} = e^{2t} \frac{d}{dt}(2t) = 2e^{2t} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{xy}{\sqrt{1 + x^2y}} \left(-2t \operatorname{sen}(t^2) \right) + \frac{x^2}{2\sqrt{1 + x^2y}} 2e^{2t} \\ &= \frac{-2txy \operatorname{sen}(t^2)}{\sqrt{1 + x^2y}} + \frac{x^2 e^{2t}}{\sqrt{1 + x^2y}} \\ &= \frac{x^2 e^{2t} - 2txy \operatorname{sen}(t^2)}{\sqrt{1 + x^2y}} \\ &= \frac{\cos^2(t^2) e^{2t} - 2t \cos(t^2) e^{2t} \operatorname{sen}(t^2)}{\sqrt{1 + \cos^2(t^2) e^{2t}}} \\ &= \cos(t^2) e^{2t} \frac{\cos(t^2) - 2t \operatorname{sen}(t^2)}{\sqrt{1 + \cos^2(t^2) e^{2t}}} \end{aligned}$$

4 [25%] Use derivação implícita para avaliar $\frac{dy}{dx}$, sabendo que a equação $\text{sen}(xy) + x^2y = \cos(x + y)$, define y como função de x

Vamos usar a fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

com

$$F(x, y) = \text{sen}(xy) + x^2y - \cos(x + y)$$

Calculando as derivadas parciais

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\text{sen}(xy) + x^2y - \cos(x + y)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\text{sen}(xy)) + \frac{\partial}{\partial x} (x^2y) - \frac{\partial}{\partial x} (\cos(x + y)) \\ &= \cos(xy) \frac{\partial xy}{\partial x} + y \frac{\partial x^2}{\partial x} + \text{sen}(x + y) \frac{\partial}{\partial x} (x + y) \\ &= y \cos(xy) + 2yx + \text{sen}(x + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\text{sen}(xy) + x^2y - \cos(x + y)) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (\text{sen}(xy)) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2y) - \frac{\partial}{\partial y} (\cos(x + y)) \\ &= \cos(xy) \frac{\partial xy}{\partial y} + x^2 \frac{\partial y}{\partial y} + \text{sen}(x + y) \frac{\partial}{\partial y} (x + y) \\ &= x \cos(xy) + x^2 + \text{sen}(x + y) \end{aligned}$$

Substituindo na fórmula temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{y \cos(xy) + 2yx + \text{sen}(x + y)}{x \cos(xy) + x^2 + \text{sen}(x + y)}$$