

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens, escreva ao menos uma, e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

Atenção: a aplicação das regras do produto ou do quociente em casos nos quais um dos termos é constante **será considerada incorreta**, por evidenciar compreensão inadequada das regras de derivação.

1 [50%] Considere a função $f(x, y, z) = e^{xy} \ln(x + z^2) + \frac{y^2}{z} - \text{sen}(xz)$

- a) Calcule o gradiente de f
- b) Calcule a derivada direcional de f no ponto $P = (1, 1, 1)$ na direção $v = (2, -1, 2)$
- c) Determine a direção em que f cresce mais rapidamente no ponto P

(a) O gradiente de $f(x, y, z) = e^{xy} \ln(x + z^2) + \frac{y^2}{z} - \text{sen}(xz)$ é $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{xy} \ln(x + z^2) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y^2}{z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\text{sen}(xz)) \\ &= y e^{xy} \ln(x + z^2) + e^{xy} \frac{1}{x + z^2} - z \cos(xz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{xy} \ln(x + z^2) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^2}{z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\text{sen}(xz)) \\ &= x e^{xy} \ln(x + z^2) + \frac{2y}{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{xy} \ln(x + z^2) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y^2}{z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (\text{sen}(xz)) \\ &= e^{xy} \frac{2z}{x + z^2} - \frac{y^2}{z^2} - x \cos(xz) \end{aligned}$$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^{xy} \ln(x+z^2) + \frac{e^{xy}}{x+z^2} - z \cos(xz) \\ xe^{xy} \ln(x+z^2) + \frac{2y}{z} \\ \frac{2ze^{xy}}{x+z^2} - \frac{y^2}{z^2} - x \cos(xz) \end{pmatrix}$$

(b) No ponto $P = (1, 1, 1)$,

$$\nabla f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} e \ln 2 + \frac{e}{2} - \cos 1 \\ e \ln 2 + 2 \\ e - 1 - \cos 1 \end{pmatrix}$$

O vetor unitário na direção de $v = (2, -1, 2)$ é

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

A derivada direcional é

$$\begin{aligned} D_u f(1, 1, 1) &= \nabla f(1, 1, 1) \cdot u \\ &= \begin{pmatrix} e \ln 2 + \frac{e}{2} - \cos 1 \\ e \ln 2 + 2 \\ e - 1 - \cos 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{3} \left(e \ln 2 + \frac{e}{2} - \cos(1) \right) - \frac{1}{3} (e \ln 2 + 2) + \frac{2}{3} (e - 1 - \cos(1)) \\ &= \frac{1}{3} (e \ln 2 + 3e - 4 \cos(1) - 4) \end{aligned}$$

(c) A função cresce mais rapidamente na direção do gradiente

$$\nabla f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} e \ln 2 + \frac{e}{2} - \cos 1 \\ e \ln 2 + 2 \\ e - 1 - \cos 1 \end{pmatrix}$$

2 [50%] Considerando a função $g(x, y) = \sqrt{xy + 1} + \sin(x - y)$

- a) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto correspondente a $(0, \pi)$
- b) Verifique se o ponto $(2, 2, -1)$ pertence ao plano

(a)

A equação do plano tangente é

$$z - z_0 = g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Calculamos inicialmente

$$g(0, \pi) = \sqrt{1} + \sin(-\pi) = 1$$

Logo,

$$z_0 = 1$$

Calculamos as derivadas parciais.

Para x ,

$$g_x(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{xy + 1}} + \cos(x - y).$$

Para y ,

$$g_y(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{xy + 1}} - \cos(x - y).$$

Avaliando em $(0, \pi)$,

$$g_x(0, \pi) = \frac{\pi}{2} + \cos(-\pi) = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$g_y(0, \pi) = -\cos(-\pi) = 1$$

$$z - 1 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)x + y - \pi.$$

b)

$$z = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)2 + y - \pi + 1 = \pi - 2 + 2 - \pi + 1$$