

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens, escreva ao menos uma, e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

Atenção: a aplicação das regras do produto ou do quociente em casos nos quais um dos termos é constante **será considerada incorreta**, por evidenciar compreensão inadequada das regras de derivação.

1 [50%] Considere a função $g(x, y, z) = \sqrt{x + y^2} \cos(yz) + \frac{x}{y + z} + z^3 \ln(x + 1)$

- a) Calcule o gradiente de f
- b) Calcule a derivada direcional de f no ponto $Q = (0, 1, 1)$ na direção $w = (1, 2, -2)$
- c) Determine a direção em que f cresce mais rapidamente no ponto P

(a) O gradiente de $g(x, y, z) = \sqrt{x + y^2} \cos(yz) + \frac{x}{y + z} + z^3 \ln(x + 1)$ é $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{xy} \ln(x + z^2) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y^2}{z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\sin(xz)) \\ &= ye^{xy} \ln(x + z^2) + e^{xy} \frac{1}{x + z^2} - z \cos(xz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{xy} \ln(x + z^2) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^2}{z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\sin(xz)) \\ &= xe^{xy} \ln(x + z^2) + \frac{2y}{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{xy} \ln(x + z^2) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y^2}{z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (\sin(xz)) \\ &= e^{xy} \frac{2z}{x + z^2} - \frac{y^2}{z^2} - x \cos(xz) \end{aligned}$$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^{xy} \ln(x+z^2) + \frac{e^{xy}}{x+z^2} - z \cos(xz) \\ xe^{xy} \ln(x+z^2) + \frac{2y}{z} \\ \frac{2ze^{xy}}{x+z^2} - \frac{y^2}{z^2} - x \cos(xz) \end{pmatrix}$$

(b) No ponto $P = (1, 1, 1)$,

$$\nabla f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} e \ln 2 + \frac{e}{2} - \cos 1 \\ e \ln 2 + 2 \\ e - 1 - \cos 1 \end{pmatrix}$$

O vetor unitário na direção de $v = (2, -1, 2)$ é

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

A derivada direcional é

$$\begin{aligned} D_u f(1, 1, 1) &= \nabla f(1, 1, 1) \cdot u \\ &= \begin{pmatrix} e \ln 2 + \frac{e}{2} - \cos 1 \\ e \ln 2 + 2 \\ e - 1 - \cos 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{3} \left(e \ln 2 + \frac{e}{2} - \cos(1) \right) - \frac{1}{3} (e \ln 2 + 2) + \frac{2}{3} (e - 1 - \cos(1)) \\ &= \frac{1}{3} (e \ln 2 + 3e - 4 \cos(1) - 4) \end{aligned}$$

(c) A função cresce mais rapidamente na direção do gradiente

$$\nabla f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} e \ln 2 + \frac{e}{2} - \cos 1 \\ e \ln 2 + 2 \\ e - 1 - \cos 1 \end{pmatrix}$$

2 [50%] Considerando a função $f(x, y) = x^2 e^y + \ln(x + y)$

- a) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto correspondente a $(1, 0)$
- b) Verifique se o ponto $(-1, 2, 1)$ pertence ao plano tangente

(a)

A equação do plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto

$$(x_0, y_0, z_0)$$

é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Primeiramente, calculamos o valor da função:

$$f(1, 0) = 1^2 e^0 + \ln(1 + 0) = 1.$$

Logo,

$$z_0 = 1.$$

Calculamos agora as derivadas parciais.

Para x ,

$$f_x(x, y) = 2xe^y + \frac{1}{x + y}.$$

Para y ,

$$f_y(x, y) = x^2 e^y + \frac{1}{x + y}.$$

Avaliando em $(1, 0)$,

$$f_x(1, 0) = 2(1)e^0 + \frac{1}{1} = 3,$$

$$f_y(1, 0) = 1^2 e^0 + \frac{1}{1} = 2.$$

Substituindo na fórmula do plano tangente,

$$z - 1 = 3(x - 1) + 2(y - 0).$$

Simplificando,

$$z = 3x + 2y - 2.$$

(b) O ponto não pertence ao plano, pois

$$\begin{aligned} z &= [3x + 2y - 2] \Big|_{(-1, 2)} \\ &= -3 + 4 - 2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\neq 1$$

(a) A equação do plano tangente ao gráfico de $z = g(x, y)$ no ponto (a, b, c) é dada por

$$z - c = g_x(a, b)(x - a) + g_y(a, b)(y - b)$$

$$c = g(0, \pi) = \sqrt{1} + \text{sen}(-\pi) = 1$$

Derivadas parciais

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{xy+1}} + \cos(x-y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy+1}} - \cos(x-y)$$

Avaliando em $(0, \pi)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, \pi) = \frac{\pi}{2\sqrt{0+1}} + \cos(-\pi) = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, \pi) = \frac{0}{2\sqrt{0+1}} - \cos(0 - \pi) = 1$$

Substituindo na fórmula

$$z - 1 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)(x - 0) + 1(y - \pi)$$

$$z - 1 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)x + y - \pi$$

$$z = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)x + y - \pi + 1$$

(b) O ponto não pertence ao plano, pois

$$z = \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)x + y - \pi + 1\right] \Big|_{(2,0)}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)2 + 0 - \pi + 1$$

$$= \pi - 2 - \pi + 1$$

$$= -1$$

$$\neq 1$$