

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens, escreva ao menos uma, e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

Atenção: a aplicação das regras do produto ou do quociente em casos nos quais um dos termos é constante **será considerada incorreta**, por evidenciar compreensão inadequada das regras de derivação.

1 [25%] Calcule a derivada parcial mista $f_{xy}(x, y)$ da função $f(x, y) = ye^{xy} - x \sin(x^2 + y)$, na ordem indicada pela notação

$$\begin{aligned}
 f_x(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} [ye^{xy} - x \sin(x^2 + y)] \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} [ye^{xy}] - \frac{\partial}{\partial x} [x \sin(x^2 + y)] \\
 &= y \frac{\partial}{\partial x} [e^{xy}] - \left(\frac{\partial x}{\partial x} \sin(x^2 + y) + x \frac{\partial}{\partial x} [\sin(x^2 + y)] \right) \\
 &= ye^{xy} \frac{\partial}{\partial x} (xy) - \sin(x^2 + y) - x \cos(x^2 + y) \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y) \\
 &= ye^{xy} y - \sin(x^2 + y) - x \cos(x^2 + y) 2x \\
 &= y^2 e^{xy} - \sin(x^2 + y) - 2x^2 \cos(x^2 + y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} [y^2 e^{xy} - \sin(x^2 + y) - 2x^2 \cos(x^2 + y)] \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} [y^2 e^{xy}] - \frac{\partial}{\partial y} [\sin(x^2 + y)] - \frac{\partial}{\partial y} [2x^2 \cos(x^2 + y)] \\
 &= \frac{\partial y^2}{\partial y} e^{xy} + y^2 \frac{\partial e^{xy}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} [\sin(x^2 + y)] - 2x^2 \frac{\partial}{\partial y} [\cos(x^2 + y)] \\
 &= 2ye^{xy} + y^2 e^{xy} \frac{\partial xy}{\partial y} - \cos(x^2 + y) \frac{\partial}{\partial y} [x^2 + y] + 2x^2 \sin(x^2 + y) \frac{\partial}{\partial y} [x^2 + y] \\
 &= 2yxe^{xy} + y^2 e^{xy} - \cos(x^2 + y) + 2x^2 \sin(x^2 + y)
 \end{aligned}$$

2 [25%] Determine se o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ existe

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Caminho $y = 0$

$$f(x, 0) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \forall x \neq 0$$

$$L_1 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Caminho $x = 0$

$$f(0, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0} = \frac{-y^2}{y^2} = -1 \quad \forall y \neq 0$$

$$L_2 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0^2 - y^2}{0^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} -1 = -1$$

Os dois caminhos conduzem ao ponto $(0, 0)$, mas produzem valores diferentes então o limite não existe.

3 [25%] Dada a equação $x^2 + xy + y^2 = 7$, determine $\frac{dy}{dx}$ por derivação implícita e calcule seu valor no ponto $(2, 3)$

Método 1 Pela fórmula temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

com

$$F(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

$$F_x(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + xy + y^2) = 2x + y$$

$$F_y(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + xy + y^2) = x + 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

Método 2

Como y é uma função de x , $y = y(x)$

$$x^2 + xy + y^2 = 7$$

$$x^2 + xy(x) + (y(x))^2 = 7$$

$$\frac{d}{dx} [x^2 + xy(x) + (y(x))^2] = \frac{d7}{dx}$$

$$2x + \frac{dx}{dx}y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (x + 2y) + 2x + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (x + 2y) = -2x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

No ponto $(1, 2)$

$$\frac{dy}{dx}(2, 3) = -\frac{2x + y}{x + 2y} \Big|_{(2, 3)} = -\frac{2 \times 2 + 3}{2 + 2 \times 3} = -\frac{7}{8}$$

4 [25%] Dados $z = u^2 + e^v$, $u = x^2 + y$ e $v = xy$. Utilize a regra da cadeia para calcular $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = e^v$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 2u(2x) + e^v y \\ &= 4x(x^2 + y) + ye^{xy}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) &= \left(4x(x^2 + y) + ye^{xy} \right) \Big|_{(1, 2)} \\ &= 4(1)(1^2 + 2) + 2e^{1 \times 2} \\ &= 12 + 2e^2\end{aligned}$$