

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens, escreva ao menos uma, e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

Atenção: a aplicação das regras do produto ou do quociente em casos nos quais um dos termos é constante **será considerada incorreta**, por evidenciar compreensão inadequada das regras de derivação.

1 [50%] Considerando a função $f(x, y) = x^2y + e^{xy}$

a [20%] Calcule o gradiente de f em $(1, 0)$ e $(3, 4)$

b [30%] Calcule a derivada direcional de f no ponto $P = (1, 0)$, na direção do vetor $\vec{v} = (3, 4)$

a)

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2y + e^{xy}) = 2xy + ye^{xy}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (x^2y + e^{xy}) = x^2 + xe^{xy}$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + ye^{xy} \\ x^2 + xe^{xy} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2xy + ye^{xy} \\ x^2 + xe^{xy} \end{pmatrix} \Big|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 \times 0 + 0e^0 \\ 1^2 + 1e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(3, 4) = \begin{pmatrix} 2xy + ye^{xy} \\ x^2 + xe^{xy} \end{pmatrix} \Big|_{(3,4)} = \begin{pmatrix} 2 \times 3 \times 4 + 4e^{3 \times 4} \\ 3^2 + 3e^{3 \times 4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 + 4e^{12} \\ 9 + 3e^{12} \end{pmatrix}$$

b)

$$D_{\vec{u}}f(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot \vec{u}$$

O vetor $\vec{v}$ não é unitário. Sua norma é $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Vetor unitário na direção de $\vec{v}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Derivada direcional

$$D_{\vec{u}}f(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = 0 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$$

2 [50%] Considerando a função $h(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + e^{xy}$

a [10%] calcule seu gradiente

b [20%] calcule a aproximação linear em torno de $(0, 2)$ (use $\ln(4) = 1,39$)

c [20%] use a aproximação linear para estimar $f(0.05, 1.98)$

a)

$$\begin{aligned}h_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln(x^2 + y^2) + e^{xy} \right) \\&= \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) + e^{xy} \frac{\partial}{\partial x} (xy) \\&= \frac{2x}{x^2 + y^2} + ye^{xy}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln(x^2 + y^2) + e^{xy} \right) \\&= \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) + e^{xy} \frac{\partial}{\partial y} (xy) \\&= \frac{2y}{x^2 + y^2} + xe^{xy}\end{aligned}$$

$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} h_x(x, y) \\ h_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2 + y^2} + ye^{xy} \\ \frac{2y}{x^2 + y^2} + xe^{xy} \end{pmatrix}$$

b)

$$L(x, y) = h(a, b) + h_x(a, b)(x - a) + h_y(a, b)(y - b) = h(0, 2) + h_x(0, 2)x + h_y(0, 2)(y - 2)$$

$$h(0, 2) = \left(\ln(x^2 + y^2) + e^{xy} \right) \Big|_{(0,2)} = \ln(0 + 2^2) + e^0 = \ln(4) + 1 \approx 2,39$$

$$h_x(0, 2) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} + ye^{xy} \right) \Big|_{(0,2)} = \frac{0}{0 + 2^2} + 2e^0 = 2$$

$$h_y(0, 2) = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} + xe^{xy} \right) \Big|_{(0,2)} = \frac{2 \times 4}{0 + 2^2} + 0e^0 = \frac{8}{4} = 2$$

$$L(x, y) = h(0, 2) + h_x(0, 2)x + h_y(0, 2)(y - 2) = 2,39 + 2x + 2(y - 2)$$

c)

$$\begin{aligned}f(0.05, 1.98) &\approx L(0.05, 1.98) = (2,39 + 2x + 2(y - 2)) \Big|_{(0.05, 1.98)} \\&= 2,39 + 2 \times 0,05 + 2(1,98 - 2) \\&= 2,39 + 0,10 - 0,04 \\&= 2,45\end{aligned}$$