

Revisão de Limites

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/pages/cfvv1>

Conteúdo

Límites

Técnicas para Calcular Límites em uma Variável

Lista Mínima

Limite de uma Função

Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de a ,
exceto, possivelmente, no próprio a

O limite de $f(x)$ quando x tende para a é o número L

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se, para cada $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$, tais que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Limites de algumas funções

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \quad n \text{ número inteiro positivo}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \quad n \text{ número inteiro positivo, se } n \text{ for par precisamos impor } a \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a) \quad \text{onde } p(x) \text{ é um polinômio em } x$$

Limites de algumas funções

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Propriedades de Limites

Se os limites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existirem, então:

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ Soma

2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ Diferença

3. $\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad \forall c \in \mathbb{R}$ Multiplicação por escalar

4. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$ Produto

5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ desde que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ Quociente

Teorema do confronto

Se $g(x) < j(x) < h(x)$

para todo x em um intervalo aberto contendo a , exceto $x = a$, e

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Conteúdo

Limites

Técnicas para Calcular Limites em uma Variável

Lista Mínima

Estratégia Geral para Cálculo de Limites

1. Substituir diretamente o valor da variável no limite
2. Identificar o resultado: número finito, $\pm\infty$ ou indeterminação
3. Em caso de indeterminação:
 - ▶ aplicar manipulações algébricas
 - ▶ utilizar fatorações
 - ▶ racionalizações
 - ▶ dividir pelo termo de maior grau

Indeterminações Comuns

▶ $\frac{0}{0}$ indeterminação algébrica

▶ $\frac{\infty}{\infty}$ formas racionais

▶ $\infty - \infty$ diferença de infinitos

▶ $0 \cdot \infty$

▶ $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Exemplo 1

Avalie o limite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Exemplo 1 – Solução

Substituindo diretamente

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \Big|_{x=2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

Indeterminação $0/0$,

não podemos dizer nada sobre o limite

Exemplo 1 – Solução

Fatorando o numerador

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\&= \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\&= x + 2\end{aligned}$$

Calculando o Limite

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = (x + 2) \Big|_{x=2} = 4$$

Exemplo 2

Calcule o limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x}{2x^2 - x}$

Exemplo 2 – Solução

Não podemos substituir diretamente, mas sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 + 5x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 - x = \infty$$

portanto temos uma indeterminação ∞/∞

e não podemos dizer nada sobre o limite

Exemplo 2 – Solução

Dividindo o numerador e o denominador pelo termo de maior grau, x^2

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x}{2x^2 - x} = \frac{(3x^2 + 5x)/x^2}{(2x^2 - x)/x^2} = \frac{3 + 5/x}{2 - 1/x}$$

Sabemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 5/x}{2 - 1/x} = \frac{3 + 0}{2 - 0} = \frac{3}{2}$$

Exemplo 3

Avalie $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right)$

Exemplo 3 – Solução

Não podemos substituir diretamente, mas sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

portanto temos uma indeterminação $\infty - \infty$

e não podemos dizer nada sobre o limite

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{x^2 + 3x} - x \\&= \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right) \frac{\sqrt{x^2 + 3x} + x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} \\&= \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} \\&= \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} \\&= \frac{3x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} \right)} + x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{3x}{x\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + x} \\&= \frac{3x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1\right)} \\&= \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1}\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} \\&= \frac{3}{\sqrt{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x}\right)} + 1} \\&= \frac{3}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Exemplo 4

Avalie $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$

Exemplo 4 – Solução

Não podemos substituir diretamente, mas sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

portanto temos uma indeterminação $0(-\infty)$

e não podemos dizer nada sobre o limite

Exemplo 4 – Solução

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(x))'}{(x^{-1})'} \\&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} \\&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0\end{aligned}$$

indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$

Regra de L'Hôpital

Exemplo 5

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$

Dica: use o Teorema do Confronto

Exemplo 5 – Solução

Como

$$-1 \leq \operatorname{sen}(u) \leq 1 \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

para $x \neq 0$

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

portanto

$$-|x| \leq x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$$

Exemplo 5 – Solução

Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0$$

Portanto, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

Técnicas principais

- ▶ Substituição direta
- ▶ Fatoração e simplificação algébrica
- ▶ Divisão por maior potência para limites no infinito
- ▶ Racionalização em diferenças envolvendo raízes
- ▶ Reescrita de produtos em quocientes
- ▶ Uso da Regra de L'Hôpital

Conteúdo

Limites

Técnicas para Calcular Limites em uma Variável

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 1 do Thomas 12^a ed.

1. Revisar atentamente texto do Capítulo 2

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações