

Derivada Direcional e Vetor Gradiente

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/pages/cfvv1>

Conteúdo

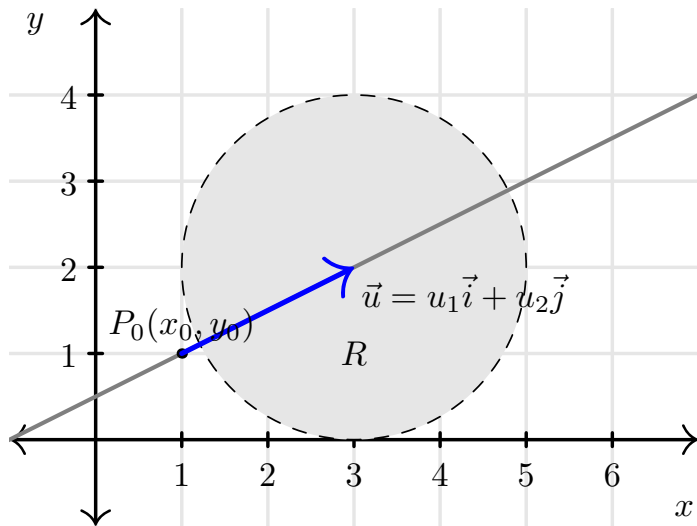
Derivada Direcional

Vetor Gradiente

Calculando a Derivada Direcional

Lista Mínima

Derivada Direccional



Definição

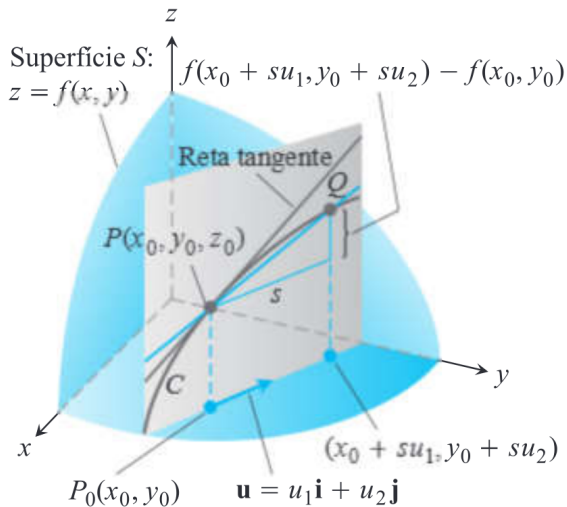
A derivada de f em (a, b) na direção do vetor unitário

$$u = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \|u\| = 1$$

é o número

$$D_u f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h}$$

Interpretação da Derivada Direcional



Interpretação da Derivada Direcional

A derivada direcional é a taxa de variação da função f na direção do vetor u

$$\text{Se } u = \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ então } D_u f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\text{Se } u = \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ então } D_u f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Exemplo 1

Use a definição para calcular a derivada de $f(x, y) = x^2 + xy$
no ponto $(1, 2)$ na direção $u = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

(Para simplificar os cálculos [neste exemplo](#), ignore o fato desse vetor não ser unitário)

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned} D_u f(1, 2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left. \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h} \right|_{(a,b)=(1,2)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + 2h, 2 + 3h) - f(1, 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1 + 2h)^2 + (1 + 2h)(2 + 3h)] - (1^2 + 1 \times 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + 4h + 4h^2) + (2 + 3h + 4h + 6h^2) - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{11h + 10h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (11 + 10h) = 11 \end{aligned}$$

Conteúdo

Derivada Direcional

Vetor Gradiente

Calculando a Derivada Direcional

Lista Mínima

Vetor Gradiente

O **vetor gradiente** de $f(x, y)$ é

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

O símbolo ∇ é chamado **nabla**

Exemplo 2

Calcule o vetor gradiente da função $f(x, y) = \sqrt{2x + 3y}$ no ponto $(-1, 2)$

Exemplo 2 – Calculando a Derivada Parcial em x

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{2x+3y} = \frac{\partial}{\partial x} (2x+3y)^{1/2} = \frac{1}{2} (2x+3y)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} (2x+3y) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2x+3y}} 2 \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2x+3y}}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2(-1)+3(2)}} = \frac{1}{\sqrt{-2+6}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 2 – Calculando a Derivada Parcial em y

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{2x+3y} = \frac{\partial}{\partial y} (2x+3y)^{1/2} = \frac{1}{2} (2x+3y)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial y} (2x+3y) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2x+3y}} 3 \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{3}{2\sqrt{2x+3y}}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 2) = \frac{3}{2\sqrt{2(-1)+3(2)}} = \frac{3}{2\sqrt{-2+6}} = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}$$

Exemplo 2 – O Vetor Gradiente

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2x+3y}} \\ \frac{3}{2\sqrt{2x+3y}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2x+3y}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – O Vetor Gradiente no Ponto $(-1, 2)$

$$\begin{aligned}\nabla f(-1, 2) &= \left[\frac{1}{\sqrt{2x+3y}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right] \Big|_{(-1,2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(-1) + 3 \times 2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Conteúdo

Derivada Direcional

Vetor Gradiente

Calculando a Derivada Direcional

Lista Mínima

Calculando a Derivada Direcional

Considere a reta que passa por (a, b) na direção de $u = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$

$$x = a + su_1 \quad y = b + su_2$$

Restringindo f à reta

$$f(s) = f(x(s), y(s))$$

Calculando a Derivada Direcional

$$\begin{aligned} D_u f &= \frac{df}{ds} = \frac{d}{ds} (f(x(s), y(s))) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d}{ds} (a + su_1) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d}{ds} (b + su_2) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2 \\ &= \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \nabla f \cdot u \end{aligned}$$

Fórmula para a Derivada Direcional

A derivada de f em (a, b) na direção do vetor unitário

$$u = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \|u\| = 1$$

pode ser calculada pela fórmula

$$D_u f(a, b) = \nabla f \cdot u$$

Exemplo 3

Encontre a derivada de $f(x, y) = xe^y + \cos(xy)$ no ponto $(2, 0)$
na direção $v = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

Exemplo 3 – Solução

O vetor v não é unitário, então precisamos dividi-lo pelo seu comprimento

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$$

Exemplo 3 – Calculando a derivada parcial em x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xe^y + \cos(xy)) = e^y - y \operatorname{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = e^0 - 0 \operatorname{sen}(2 \times 0) = 1$$

Exemplo 3 – Calculando a derivada parcial em y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xe^y + \cos(xy)) = xe^y - x \operatorname{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = 2e^0 - 2 \operatorname{sen}(2 \times 0) = 2$$

Exemplo 3 – Gradiente no ponto $(2, 0)$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} e^y - y \operatorname{sen}(xy) \\ xe^y - x \operatorname{sen}(xy) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Calculando a Derivada Direcional

$$\begin{aligned} D_u f(2, 0) &= \nabla f(2, 0) \cdot u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} \\ &= 1\frac{3}{5} + 2\frac{-4}{5} = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -\frac{5}{5} = -1 \end{aligned}$$

Exemplo 4

Encontre a derivada de $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ no ponto $(1, 2)$

na direção $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exemplo 4 – Solução

O vetor v não é unitário, então precisamos dividi-lo pelo seu comprimento

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Calculando a derivada parcial em x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \ln(x^2 + y^2 + 1) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + 1) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \Big|_{(1,2)} = \frac{2 \times 1}{1^2 + 2^2 + 1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Exemplo 4 – Calculando a derivada parcial em y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \ln(x^2 + y^2 + 1) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + 1) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \Big|_{(1,2)} = \frac{2 \times 2}{1^2 + 2^2 + 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Exemplo 4 – Gradiente no ponto $(1, 2)$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \\ \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(1, 2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Calculando a Derivada Direcional

$$D_u f(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot u = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{-2}{3\sqrt{5}} + \frac{2}{3\sqrt{5}} = 0$$

Conteúdo

Derivada Direcional

Vetor Gradiente

Calculando a Derivada Direcional

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 14.5

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 1-3, 7-9, 11-13

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações