

Propriedades do Vetor Gradiente

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/pages/cfvv1>

Conteúdo

Vetor Gradiente

Gradientes e Crescimento da Função

Gradientes e Curvas de Nível

Propriedades Algébricas

Lista Mínima

Vetor Gradiente

Se uma função $f(x, y)$ é derivável, seu **vetor gradiente** é

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Vetor Gradiente 3D

Se uma função $f(x, y, z)$ é derivável, seu **vetor gradiente** é

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Conteúdo

Vetor Gradiente

Gradientes e Crescimento da Função

Gradientes e Curvas de Nível

Propriedades Algébricas

Lista Mínima

Derivada Direccional

$$D_u f = \nabla f \cdot u$$

$$= \|\nabla f\| \|u\| \cos(\theta)$$

$$= \|\nabla f\| \cos(\theta)$$

Crescimento da Função

1. A função aumenta mais rapidamente quando $\cos(\theta) = 1, \quad \theta = 0$

Direção do gradiente

2. A função decresce mais rapidamente quando $\cos(\theta) = -1, \quad \theta = \pi$

Direção oposta ao gradiente

3. Se u for ortogonal a $\nabla f \neq 0$ ele aponta para uma direção de variação nula

Gradientes e Crescimento da Função

1. Direção de **maior crescimento** da função f no ponto (x, y)

$$v_M = \nabla f(x, y)$$

2. Direção de **maior decrescimento** da função f no ponto (x, y)

$$v_m = -\nabla f(x, y)$$

3. Direção de **variação nula** da função f no ponto (x, y)

$$\nabla f(x, y) \cdot v_o = 0$$

Exemplo 1

Analisando a função $f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2}$ no ponto $(1, 1)$

Encontre as direções nas quais:

- a) f cresce mais rapidamente
- b) f decresce mais rapidamente
- c) f não varia

Exemplo 1 – Calculando as Derivadas Parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 + \frac{y^2}{2} \right) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(x^2 + \frac{y^2}{2} \right) = y$$

Exemplo 1 – Gradiente

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 + \frac{y^2}{2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(x^2 + \frac{y^2}{2} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

Avaliando o gradiente no ponto solicitado

$$\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} \Big|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

a) f cresce mais rapidamente na direção do gradiente

$$v_M = \nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) f decresce mais rapidamente na direção oposta ao gradiente

$$v_m = -\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

c) f não varia na direção, v_o , ortogonal ao gradiente

$$\nabla f(1, 1) \cdot v_o = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$2v_1 + v_2 = 0$$

$$v_2 = -2v_1$$

As direções são $v_o = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $v_o = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Conteúdo

Vetor Gradiente

Gradientes e Crescimento da Função

Gradientes e Curvas de Nível

Propriedades Algébricas

Lista Mínima

Curvas de Nível

Curva de Nível é o conjunto de pontos (x, y) onde

$$f(x, y) = c$$

para um valor constante c

Em alguns casos, é possível escrever essa região como uma curva paramétrica

$$x = g(t) \quad y = h(t)$$

Vetorialmente temos

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} = \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$$

Tangente de uma Curva de Nível

$$f(g(t), h(t)) = c$$

$$\frac{d}{dt}f(g(t), h(t)) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dh}{dt} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dg}{dt} \\ \frac{dh}{dt} \end{pmatrix} = 0$$

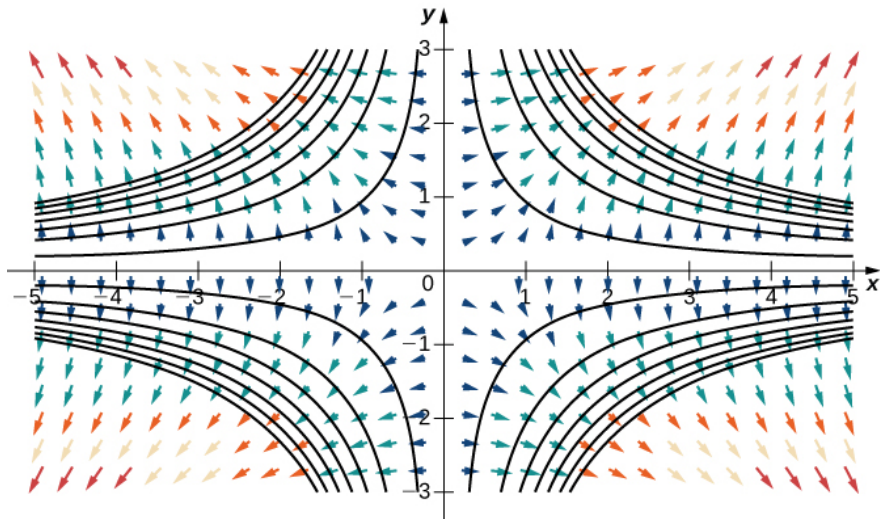
$$\nabla f \cdot \frac{dr}{dt} = 0$$

O gradiente é **ortogonal** ao vetor tangente à curva de nível

Funções Diferenciáveis

Em todo ponto (a, b) no domínio de uma **função diferenciável** $f(x, y)$,
o **gradiente** de f é **normal** à **curva de nível** que passa por (a, b)

Gradientes e Curvas de Nível



Exemplo 2

Dada a função

$$f(x, y) = 6x - 3y + 9$$

- a) Determine e esboce a curva de nível $f(x, y) = 6$
- b) Calcule e esboce o gradiente de f nos pontos $(0, 1)$ e $(1, 3)$

Exemplo 2 – Solução

a) Determinando a curva de nível

$$f(x, y) = 6$$

$$6x - 3y + 9 = 6$$

$$-3y = 6 - 6x - 9$$

$$-3y = -6x - 3$$

$$y = 2x + 1$$

A curva de nível é uma reta

Exemplo 2 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (6x - 3y + 9) = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (6x - 3y + 9) = -3$$

Gradiente de f

$$\nabla f(x, y) = \nabla (6x - 3y + 9) = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(0, 1)$ e $(1, 3)$

$$\nabla f(0, 1) = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2, -1) = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3

Dada a função

$$f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$$

- a) Determine e esboce a curva de nível $f(x, y) = 4$
- b) Calcule e esboce o gradiente de f nos pontos $(0, 1)$, $(2, -1)$, $(2, 3)$ e $(4, 1)$

Exemplo 3 – Solução

a) Determinando a curva de nível

$$f(x, y) = 4$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

Equação da circunferência centrada em $(2, 1)$ e raio 2

Exemplo 3 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [(x-2)^2 + (y-1)^2] = 2(x-2) \frac{\partial}{\partial x} (x-2) = 2(x-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [(x-2)^2 + (y-1)^2] = 2(y-1) \frac{\partial}{\partial y} (y-1) = 2(y-1)$$

Gradiente de f

$$\nabla f(x, y) = \nabla [(x-2)^2 + (y-1)^2] = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(0, 1)$ e $(2, -1)$

$$\nabla f(0, 1) = \begin{pmatrix} 2(x - 2) \\ 2(y - 1) \end{pmatrix} \Big|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 2(0 - 2) \\ 2(1 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2, -1) = \begin{pmatrix} 2(x - 2) \\ 2(y - 1) \end{pmatrix} \Big|_{(2,-1)} = \begin{pmatrix} 2(2 - 2) \\ 2(-1 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(2, 3)$ e $(4, 1)$

$$\nabla f(2, 3) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix} \Big|_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 2(2-2) \\ 2(2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(4, 1) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix} \Big|_{(4,1)} = \begin{pmatrix} 2(4-2) \\ 2(1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4

Encontre uma equação para a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

no ponto $(-2, 1)$

Note que a elipse é uma curva de nível da função

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$

Exemplo 4 – Derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2}{4} + y^2 \right) = \frac{x}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2}{4} + y^2 \right) = 2y$$

Exemplo 4 – Gradiente

Então o gradiente de f , no ponto $(-2, 1)$, é

$$\nabla f(-2, 1) = \left(\begin{array}{c} \frac{x}{2} \\ 2y \end{array} \right) \Big|_{(-2,1)} = \left(\begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array} \right)$$

Exemplo 4 – Reta Tangente

A reta tangente é ortogonal ao vetor gradiente

$$\nabla f(a, b) \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} = 0$$

$$- (x + 2) + 2(y - 1) = 0$$

$$\nabla f(-2, 1) \cdot \begin{pmatrix} x - (-2) \\ y - 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$- x + 2y - 4 = 0$$

$$- x + 2y = 4$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x + 2 \\ y - 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$x = 2y - 4$$

Conteúdo

Vetor Gradiente

Gradientes e Crescimento da Função

Gradientes e Curvas de Nível

Propriedades Algébricas

Lista Mínima

Propriedades Algébricas do Gradiente

1. Soma

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$$

2. Diferença

$$\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$$

3. Multiplicação por constante

$$\nabla(kf) = k\nabla f$$

4. Produto

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

5. Quociente

$$\nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

Exemplo 5

Dadas $f(x, y) = x^2 - 2y$ e $g(x, y) = xy^2$

a) calcule os gradientes de f e g

b) calcule $\nabla(f - g)$

c) calcule $\nabla(fg)$

Exemplo 5 – Solução

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 2y) \\ \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - 2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (xy^2) \\ \frac{\partial}{\partial y} (xy^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\nabla(f - g) &= \nabla f - \nabla g \\ &= \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x - y^2 \\ -2 - 2xy \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\&= (x^2 - 2y) \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + (xy^2) \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} (x^2 - 2y)y^2 \\ (x^2 - 2y)2xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (xy^2)2x \\ -(xy^2)2 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} x^2y^2 - 2y^3 \\ 2x^3y - 4xy^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x^2y^2 \\ -2xy^2 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 3x^2y^2 - 2y^3 \\ 2x^3y - 6xy^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Conteúdo

Vetor Gradiente

Gradientes e Crescimento da Função

Gradientes e Curvas de Nível

Propriedades Algébricas

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 14.5

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 20, 22, 24, 26, 28, 29

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações