Linearização

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

11 de março de 2026

Conteúdo

Plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$

O plano tangente ao gráfico de de uma função diferenciável $f(x, y)$ no ponto (a, b) é

$$f_x(a, b)\big(x - a\big) + f_y(a, b)\big(y - b\big) - \big(z - f(a, b)\big) = 0$$

Rearranjando

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)\big(x - a\big) + f_y(a, b)\big(y - b\big)$$

Aproximação linear

Aproximação linear, ou Linearização de uma função diferenciável de duas variáveis em torno do ponto (a, b)

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Conteúdo

Exemplo 1

Encontre linearização da função

$$f(x, y) = x^2 - xy - y^2$$

no ponto $(1, 1)$

Exemplo 1 – Linearização de f no ponto $(1, 1)$

$$
\begin{aligned}
L(x, y) &= f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\
&= f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1)
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Avaliando a derivada parcial em x

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 - xy - y^2\right] = 2x - y$$

$$f_x(1, 1) = (2x - y)\Big|_{(1,1)} = 2 \times 1 - 1 = 1$$

Exemplo 1 – Avaliando a derivada parcial em y

$$f_y(x, y) \;=\; \frac{\partial f}{\partial y} \;=\; \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 - xy - y^2\right] \;=\; -x - 2y$$

$$f_y(1, 1) \;=\; (-x - 2y)\Big|_{(1,1)} \;=\; -1 - 2 \times 1 \;=\; -3$$

Exemplo 1 – Avaliando a função

$$f(1,1) \;=\; \left(x^2 - xy - y^2\right)\Big|_{(1,1)} \;=\; 1^2 - 1 \times 1 - 1^2 \;=\; -1$$

Exemplo 1 – Linearização

$$
\begin{aligned}
L(x, y) &= f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) \\
&= -1 + 1(x-1) - 3(y-1) \\
&= -1 + x - 1 - 3y + 3 \\
&= x - 3y + 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

Encontre a linearização de

$$f(x, y) = x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3$$

no ponto $(3, 2)$

Exemplo 2 – Avaliando a derivada parcial em x

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3\right) = 2x - y$$

$$f_x(3, 2) = (2x - y)\Big|_{(3,2)} = 2 \times 3 - 2 = 4$$

Exemplo 2 – Avaliando a derivada parcial em y

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3\right) = -x + y$$

$$f_y(3, 2) = (-x + y)\Big|_{(3,2)} = -3 + 2 = -1$$

Exemplo 2 – Avaliando a função

$$f(3,2) = \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3 \right) \Bigg|_{(3,2)} = 3^2 - 3 \times 2 + \frac{2^2}{2} + 3 = 8$$

Exemplo 2 – Aproximação linear

$$
\begin{aligned}
L(x, y) &= f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\
&= f(3, 2) + f_x(3, 2)(x - 3) + f_y(3, 2)(y - 2) \\
&= 8 + 4(x - 3) + (-1)(y - 2) \\
&= 4x - y - 2
\end{aligned}
$$

Exemplo 3

Seja

$$f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$$

use a aproximação linear de f no ponto $(1, 2)$ para estimar $f(1{,}01; 1{,}98)$

Exemplo 3 – Avaliando a derivada parcial em x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(x^2 + y^2\right)\right) = \frac{1}{x^2 + y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \left.\frac{2x}{x^2 + y^2}\right|_{(1,2)} = \frac{2 \times 1}{1^2 + 2^2} = \frac{2}{5}$$

Exemplo 3 – Avaliando a derivada parcial em y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right) = \frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \left.\frac{2y}{x^2+y^2}\right|_{(1,2)} = \frac{2\times 2}{1^2+2^2} = \frac{4}{5}$$

Exemplo 3 – Avaliando a função

$$f(1,2) \;=\; \ln(1+4) \;=\; \ln(5)$$

Exemplo 3 – Aproximação linear

$$L(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

$$= \ln(5) + \frac{2}{5}(x-1) + \frac{4}{5}(y-2)$$

Exemplo 3 – Avaliando no ponto $f(1{,}01; 1{,}98)$

$$
\begin{aligned}
L(1{,}01; 1{,}98) &= \ln(5) + \frac{2}{5}(0{,}01) + \frac{4}{5}(-0{,}02) \\
&= \ln(5) + \frac{2-8}{500} \\
&= \ln(5) - \frac{6}{500} \\
&= \ln(5) - \frac{3}{250}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Comparando com o valor exato

Com uma calculadora podemos avaliar

$$L(1{,}01; 1{,}98) \approx 1.59744$$

$$f(1{,}01; 1{,}98) \approx 1.59747$$

Exemplo 4

Seja

$$f(x, y) = \sqrt{4x + y^2}$$

use a aproximação linear de f no ponto $(1, 2)$ para estimar $f(1.02, 1.99)$

Exemplo 4 – Avaliando a derivada parcial em x

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{4x + y^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(4x + y^2\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\left(4x + y^2\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(4x + y^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{4x + y^2}}\,4 \\
&= \frac{2}{\sqrt{4x + y^2}}
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Avaliando a derivada parcial em x

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) &= \left.\frac{2}{\sqrt{4x+y^2}}\right|_{(1,2)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{4\times 1+2^2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{8}} \;=\; \frac{2}{2\sqrt{2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Avaliando a derivada parcial em y

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{4x + y^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(4x + y^2\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\left(4x + y^2\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial y}\left(4x + y^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{4x + y^2}}\,2y \\
&= \frac{y}{\sqrt{4x + y^2}}
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Avaliando a derivada parcial em y

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) &= \frac{y}{\sqrt{4x+y^2}}\,\Bigg|_{(1,2)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{4\times 1+2^2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Avaliando a função

$$
\begin{aligned}
f(1,2) &= \sqrt{4x + y^2}\Big|_{(1,2)} \\
&= \sqrt{4 \times 1 + 2^2} \\
&= \sqrt{4 + 4} \\
&= \sqrt{8} \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Aproximação linear

$$
\begin{aligned}
L(x, y) &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \\
&= f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2) \\
&= 2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(y - 2) \\
&= \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{x + y - 3}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{x + y + 1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Aproximação

$$L(1.02, 1.99) = \frac{1.02 + 1.99 + 1}{\sqrt{2}} = \frac{4.01}{\sqrt{2}} = 2.005\sqrt{2}$$

Exemplo 4 – Comparando com o valor exato

Com uma calculadora podemos avaliar

$$L(1.02, 1.99) \approx 2.8284$$

$$f(1.02, 1.99) \approx 2.8355$$

Exemplo 5

Utilize a linearização da função

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos(xy)$$

no ponto $\left(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}\right)$, para obter uma estimativa para $f(2, 1)$

Exemplo 5 – Avaliando a derivada parcial em x

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2-y^2}\cos(xy)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2-y^2}\right)\cos(xy) + e^{x^2-y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(xy)\right) \\
&= e^{x^2-y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-y^2\right)\cos(xy) - e^{x^2-y^2}\operatorname{sen}(xy)\frac{\partial}{\partial x}\left(xy\right) \\
&= e^{x^2-y^2}2x\cos(xy) - e^{x^2-y^2}\operatorname{sen}(xy)y \\
&= e^{x^2-y^2}\left(2x\cos(xy) - y\operatorname{sen}(xy)\right)
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 – Avaliando a derivada parcial em x

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right) &= e^{\sqrt{\pi}^2-\sqrt{\pi}^2}\left(2\sqrt{\pi}\cos\left(\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}\right)-\sqrt{\pi}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}\right)\right)\\
&= e^{0}\left(2\sqrt{\pi}\cos\left(\pi\right)-\sqrt{\pi}\operatorname{sen}\left(\pi\right)\right)\\
&= 2\sqrt{\pi}(-1)-\sqrt{\pi}0\\
&= -2\sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 – Avaliando a derivada parcial em y

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2-y^2}\cos(xy)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2-y^2}\right)\cos(xy) + e^{x^2-y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(xy)\right) \\
&= e^{x^2-y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-y^2\right)\cos(xy) - e^{x^2-y^2}\operatorname{sen}(xy)\frac{\partial}{\partial y}\left(xy\right) \\
&= e^{x^2-y^2}\left(-2y\right)\cos(xy) - e^{x^2-y^2}\operatorname{sen}(xy)x \\
&= -e^{x^2-y^2}\left(2y\cos(xy) + x\operatorname{sen}(xy)\right)
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 – Avaliando a derivada parcial em y

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}\right) &= -e^{\sqrt{\pi}^2-\sqrt{\pi}^2}\Big(2\sqrt{\pi}\cos(\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}) + \sqrt{\pi}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\pi}\sqrt{\pi})\Big) \\
&= -e^{0}\Big(2\sqrt{\pi}(-1) + \sqrt{\pi}0\Big) \\
&= 2\sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 – Avaliando a função no ponto

$$
\begin{aligned}
f(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) &= e^{x^2 - y^2} \cos(xy) \\
&= e^{\sqrt{\pi}^2 - \sqrt{\pi}^2} \cos\left(\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}\right) \\
&= e^0 \cos(\pi) \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 – Aproximação linear

$$
\begin{aligned}
L(x, y) &= f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\
&= f\left(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}\right) + f_x\left(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}\right)\left(x - \sqrt{\pi}\right) + f_y\left(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}\right)\left(y - \sqrt{\pi}\right) \\
&= -1 - 2\sqrt{\pi}\left(x - \sqrt{\pi}\right) + 2\sqrt{\pi}\left(y - \sqrt{\pi}\right) \\
&= -1 - 2\sqrt{\pi}x + 2\pi + 2\sqrt{\pi}y - 2\pi \\
&= 2\sqrt{\pi}(y - x) - 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 – Avaliando a estimativa para $f(3, 2)$

$$L(2, 1) \;=\; 2\sqrt{\pi}(1 - 2) - 1 \;=\; -2\sqrt{\pi} - 1$$

Exemplo 5 – Comparando com o valor exato

Com uma calculadora podemos avaliar

$$L(2,1) \approx -4.54490770181$$

$$f(2,1) \approx -8.35853265094$$

Os pontos estão muito longe para que a aproximação linear seja adequada

Conteúdo

Lista mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 14.6

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 25-30

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações