

Máximos e Mínimos

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/pages/cfvv1>

Conteúdo

Extremos locais

Teste da derivada segunda

Exemplos

Lista mínima

Extremos locais

Seja $f(x, y)$ definida em uma região R que contém o ponto (a, b)

- ▶ $f(a, b)$ é um valor **máximo local** de f se

$$f(a, b) \geq f(x, y)$$

para (x, y) do domínio em um disco aberto centrado em (a, b)

- ▶ $f(a, b)$ é um valor **mínimo local** de f se

$$f(a, b) \leq f(x, y)$$

para (x, y) do domínio em um disco aberto centrado em (a, b)

Teste da derivada de primeira ordem

Se $f(x, y)$ tiver um máximo ou mínimo local em um ponto interior (a, b) do seu domínio

e se as derivadas de primeira ordem existirem em (a, b) , então

$$f_x(a, b) = 0 \quad f_y(a, b) = 0$$

Ponto crítico

Um **Ponto Crítico** de uma função $f(x, y)$

é um ponto (a, b) , no **interior do domínio** de f , onde

$$f_x(a, b) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(a, b) = 0 \qquad \nabla f(a, b) = 0$$

ou

$$f_x(a, b) \quad \text{ou} \quad f_y(a, b) \quad \text{não exista} \qquad \nabla f(a, b) \text{ não existe}$$

Ponto de sela

Uma função diferenciável $f(x, y)$ possui um ponto de sela em (a, b) se, em todo disco aberto centrado em (a, b) , existirem pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) onde

$$f(x_1, y_1) > f(a, b)$$

$$f(x_2, y_2) < f(a, b)$$

Exemplo 1

Encontre os pontos críticos e valores extremos locais da função

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 9$$

Exemplo 1 – Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 - 4y + 9) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 - 4y + 9) = 2y - 4$$

Exemplo 1 – Pontos críticos

As derivadas existem em todos os pontos do plano

Plano tangente horizontal

$$f_x(x, y) = 0$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

$$f_y(x, y) = 0$$

$$2y - 4 = 0$$

$$y = 2$$

Ponto critico é $(0, 2)$

Exemplo 1 – Avaliando a função

Onde a função vale

$$f(0, 2) = (x^2 + y^2 - 4y + 9) \Big|_{(0,2)} = 0 + 4 - 8 + 9 = 5$$

Analisando a função percebemos que 5 é o menor valor que ela assume, portanto é um ponto de mínimo local (e nesse caso global também)

Conteúdo

Extremos locais

Teste da derivada segunda

Exemplos

Lista mínima

Hessiana

Matriz Hessiana

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Discriminante (ou Hessiano)

$$D(x, y) = \det H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$$

Teste da derivada segunda

Seja $f(x, y)$ diferenciável e (a, b) um ponto crítico onde $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$

1. se $\det H(a, b) = 0$ o teste é inconclusivo
2. se $\det H(a, b) < 0$ f tem um ponto de sela em (a, b)
3. se $\det H(a, b) > 0$ testamos a derivada segunda em x (ou y)
 - 3.1 se $f_{xx}(a, b) < 0$ f tem um máximo local em (a, b)
 - 3.2 se $f_{xx}(a, b) > 0$ f tem um mínimo local em (a, b)

Conteúdo

Extremos locais

Teste da derivada segunda

Exemplos

Lista mínima

Exemplo 2

Encontre e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$$

Avalie os valores extremos locais de f

Exemplo 2 – Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4) = y - 2x - 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4) = x - 2y - 2$$

Exemplo 2 – Pontos críticos

As derivadas existem em todos os pontos do plano

Buscando os pontos onde plano tangente é horizontal

Exemplo 2 – Resolvendo o sistema

$$y - 2x - 2 = 0$$

$$f_x(x, y) = y - 2x - 2 = 0$$

$$y - 2(2y + 2) - 2 = 0$$

$$f_y(x, y) = x - 2y - 2 = 0$$

$$y - 4y + -6 = 0$$

$$-3y = 6$$

$$x - 2y - 2 = 0$$

$$y = -2$$

$$x = 2y + 2$$

$$x = 2y + 2 = 2(-2) + 2 = -2$$

Ponto crítico $(-2, -2)$

Exemplo 2 – Calculando as derivadas segundas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (y - 2x - 2) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (x - 2y - 2) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (x - 2y - 2) = 1$$

Discriminante

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = (-2)(-2) - 1 = 3$$

$$D(-2, -2) = 3$$

Exemplo 2 – Caracterização do ponto

Como $D(-2, -2) = 3 > 0$ e $f_{xx}(-2, -2) = -2 < 0$

pelo teste da derivada segunda

o ponto $(-2, -2)$ é um ponto de máximo local

O valor da função neste máximo local é

$$\begin{aligned} f(-2, -2) &= (xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4) \Big|_{(-2, -2)} \\ &= (-2)(-2) - (-2)^2 - (-2)^2 - 2(-2) - 2(-2) + 4 \\ &= 4 - 4 - 4 + 4 + 4 + 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Exemplo 3

Encontre e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$$

Avalie os valores extremos locais de f

Exemplo 3 – Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy) = -6x + 6y = 6y - 6x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy) = 6y - 6y^2 + 6x$$

Exemplo 3 – Pontos críticos

As derivadas existem em todos os pontos do plano

Buscamos os pontos onde as derivadas parciais são nulas

Exemplo 3 – Derivadas parciais

$$f_x(x, y) = 6y - 6x = 0$$

$$f_y(x, y) = 6y - 6y^2 + 6x = 0$$

$$6y - 6x = 0$$

$$x = y$$

$$6y - 6y^2 + 6x = 0$$

$$6y^2 - 6y - 6x = 0$$

$$6y^2 - 6y - 6y = 0$$

$$6y^2 - 12y = 0$$

$$6y(y - 2) = 0$$

Portanto $y = 0$ ou $y = 2$

Os pontos críticos são $(0, 0)$ e $(2, 2)$

Exemplo 3 – Derivadas segundas

Discriminante

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (6y - 6x) = -6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (6y - 6y^2 + 6x) = 6 - 12y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (6y - 6x) = 6$$

$$\begin{aligned} D(x, y) &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) \\ &= (-6)(6 - 12y) - 6^2 \\ &= -36 + 72y - 36 \\ &= 72(y - 1) \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Analisando o ponto $(0, 0)$

Como

$$D(0, 0) = 72(0 - 1) = -72 < 0$$

pelo teste da derivada segunda

esse ponto é um ponto de sela

Exemplo 3 – Analisando o ponto $(2, 2)$

Como

$$D(2, 2) = 72(2 - 1) = 72 > 0 \quad f_{xx}(2, 2) = -6 < 0$$

pelo teste da derivada segunda, o ponto $(2, 2)$ é um máximo local com valor

$$\begin{aligned} f(2, 2) &= (3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy) \Big|_{(2,2)} \\ &= 3 \times 2^2 - 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 6 \times 2 \times 2 \\ &= 12 - 16 - 12 + 24 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Exemplo 4

Seja

$$f(x, y) = e^x \cos(y)$$

encontre os pontos críticos de f e classifique-os

Exemplo 4 – Derivadas primeiras

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos(y)) \\&= e^x \cos(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (e^x \cos(y)) \\&= -e^x \operatorname{sen}(y)\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Pontos onde as derivadas são nulas

$$f_x(x, y) = 0$$

$$e^x \cos(y) = 0$$

$$\cos(y) = 0$$

$$y = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$f_y(x, y) = 0$$

$$-e^x \sin(y) = 0$$

$$\sin(y) = 0$$

$$y = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Exemplo 4 – Soluções

Não existe solução simultânea
e as derivadas existem em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$,
portanto, não há pontos críticos

Exemplo 5

Seja

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

encontre os pontos críticos de f e classifique-os

Exemplo 5 – Derivadas primeiras

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (\ln(x^2 + y^2 + 1)) \\&= \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + 1) \\&= \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (\ln(x^2 + y^2 + 1)) \\&= \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + 1) \\&= \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Pontos onde as derivadas são nulas

$$f_x(x, y) = 0$$

$$\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} = 0$$

$$x = 0$$

$$f_y(x, y) = 0$$

$$\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} = 0$$

$$y = 0$$

Ponto crítico $(0, 0)$

Exemplo 5 – Derivadas segundas

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \right) \\&= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(2x)(x^2 + y^2 + 1) - 2x \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \\&= \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - 2x(2x)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \\&= \frac{2(y^2 + 1 - x^2)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Derivadas segundas

$$\begin{aligned}f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \right) \\&= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(2y)(x^2 + y^2 + 1) - 2y \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \\&= \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - 2y(2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \\&= \frac{2(x^2 + 1 - y^2)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Derivadas segundas

$$\begin{aligned}f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \right) \\&= 2x \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + 1)^{-1} \\&= 2x \frac{-1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + 1) \\&= \frac{-2x}{(x^2 + y^2 + 1)^2} (2y) \\&= \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Derivadas segundas

$$f_{xx}(x, y) = \frac{2(y^2 + 1 - x^2)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$f_{xx}(0, 0) = 2$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{2(x^2 + 1 - y^2)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$f_{yy}(0, 0) = 2$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$f_{xy}(0, 0) = 0$$

Exemplo 5 – Discriminante

$$D(0, 0) = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0)$$

$$= 2 \times 2 - 0^2$$

$$= 4 > 0$$

$$f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$$

O ponto $(0, 0)$ é um mínimo local

Exemplo 6

Seja

$$f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$$

Encontre os pontos críticos de f e classifique-os

Exemplo 6 – Derivadas primeiras

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x e^{-x^2-y^2} \right) \\&= \frac{\partial x}{\partial x} e^{-x^2-y^2} + x \frac{\partial}{\partial x} e^{-x^2-y^2} \\&= e^{-x^2-y^2} + x e^{-x^2-y^2} \frac{\partial}{\partial x} (-x^2 - y^2) \\&= e^{-x^2-y^2} + x e^{-x^2-y^2} (-2x) \\&= (1 - 2x^2) e^{-x^2-y^2}\end{aligned}$$

Exemplo 6 – Derivadas primeiras

$$\begin{aligned}f_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(x e^{-x^2 - y^2} \right) \\&= x \frac{\partial}{\partial y} e^{-x^2 - y^2} \\&= x e^{-x^2 - y^2} \frac{\partial}{\partial y} (-x^2 - y^2) \\&= x e^{-x^2 - y^2} (-2y) \\&= -2xy e^{-x^2 - y^2}\end{aligned}$$

Exemplo 6 – Pontos críticos

As derivadas existem em todos os pontos do plano

Pontos com plano tangente horizontal

Exemplo 6 – Sistema

$$\begin{cases} f_y(x, y) = 0 \\ f_x(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 2x^2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - 2x^2) e^{-x^2-y^2} = 0 \\ -2xye^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

$$xy = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Exemplo 6 – Sistema

Se $x = 0$

$$f_x(0, y) = 0$$

$$1 - 2 \times 0^2 = 0$$

$$1 = 0$$

Não existe solução

Pontos críticos $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Se $y = 0$

$$f_x(x, 0) = 0$$

$$1 - 2x^2 = 0$$

$$2x^2 = 1$$

$$x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - 2x^2) e^{-x^2-y^2} \right) \\&= \frac{\partial}{\partial x} (1 - 2x^2) e^{-x^2-y^2} + (1 - 2x^2) \frac{\partial}{\partial x} e^{-x^2-y^2} \\&= -4xe^{-x^2-y^2} + (1 - 2x^2) e^{-x^2-y^2} \frac{\partial}{\partial x} (-x^2 - y^2) \\&= -4xe^{-x^2-y^2} + (1 - 2x^2) e^{-x^2-y^2} (-2x) \\&= [-4x + (1 - 2x^2) (-2x)] e^{-x^2-y^2} \\&= 2x (2x^2 - 3) e^{-x^2-y^2}\end{aligned}$$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$\begin{aligned}f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-2xye^{-x^2-y^2} \right) \\&= -2x \left(\frac{\partial y}{\partial y} e^{-x^2-y^2} + y \frac{\partial}{\partial y} e^{-x^2-y^2} \right) \\&= -2x \left(e^{-x^2-y^2} + ye^{-x^2-y^2} \frac{\partial}{\partial y} (-x^2 - y^2) \right) \\&= -2x \left(e^{-x^2-y^2} + ye^{-x^2-y^2} (-2y) \right) \\&= -2x (1 - 2y^2) e^{-x^2-y^2} \\&= 2x (2y^2 - 1) e^{-x^2-y^2}\end{aligned}$$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$\begin{aligned}f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left((1 - 2x^2) e^{-x^2 - y^2} \right) \\&= (1 - 2x^2) \frac{\partial}{\partial y} e^{-x^2 - y^2} \\&= (1 - 2x^2) e^{-x^2 - y^2} \frac{\partial}{\partial y} (-x^2 - y^2) \\&= (1 - 2x^2) e^{-x^2 - y^2} (-2y) \\&= 2y (2x^2 - 1) e^{-x^2 - y^2}\end{aligned}$$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

Derivadas segundas

$$f_{xx}(x, y) = 2x (2x^2 - 3) e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{yy}(x, y) = 2x (2y^2 - 1) e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy}(x, y) = 2y (2x^2 - 1) e^{-x^2-y^2}$$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$\begin{aligned} f_{xx} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) &= 2 \left(2x^3 - 3x \right) e^{-x^2-y^2} \Big|_{(1/\sqrt{2}, 0)} \\ &= 2 \left(2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 - \frac{3}{\sqrt{2}} \right) e^{-(1/\sqrt{2})^2} \\ &= 2 \left(\frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} \right) e^{-1/2} \\ &= 2 \frac{1-3}{\sqrt{2}} e^{-1/2} \\ &= -2\sqrt{2} e^{-1/2} \end{aligned}$$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$\begin{aligned} f_{yy} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) &= 2x (2y^2 - 1) e^{-x^2 - y^2} \Big|_{(1/\sqrt{2}, 0)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} (-1) e^{-1/2} \\ &= -\sqrt{2} e^{-1/2} \end{aligned}$$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$f_{xy} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = 2y (2x^2 - 1) e^{-x^2 - y^2} \Big|_{(1/\sqrt{2}, 0)} = 0$$

Exemplo 6 – Discriminante

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) &= \det H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) f_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) - f_{xy}^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ &= \left(-2\sqrt{2}e^{-1/2}\right) \left(-\sqrt{2}e^{-1/2}\right) - 0 \\ &= 4e^{-1} = \frac{4}{e} > 0 \end{aligned}$$

$$f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -2\sqrt{2}e^{-1/2} < 0$$

O ponto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ é um máximo local

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$\begin{aligned}f_{xx} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right) &= 2 \left(2x^3 - 3x \right) e^{-x^2-y^2} \Big|_{(-1/\sqrt{2}, 0)} \\&= 2 \left(2 \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right)^3 + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) e^{-(-1/\sqrt{2})^2} \\&= 2 \left(\frac{-2}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) e^{-1/2} \\&= 2 \frac{-1 + 3}{\sqrt{2}} e^{-1/2} \\&= 2\sqrt{2} e^{-1/2}\end{aligned}$$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$\begin{aligned} f_{yy} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right) &= 2x (2y^2 - 1) e^{-x^2 - y^2} \Big|_{(-1/\sqrt{2}, 0)} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{2}} (-1) e^{-1/2} \\ &= \sqrt{2} e^{-1/2} \end{aligned}$$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$f_{xy} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = 2y (2x^2 - 1) e^{-x^2 - y^2} \Big|_{(-1/\sqrt{2}, 0)} = 0$$

Exemplo 6 – Discriminante

$$\begin{aligned} D\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) &= \det H\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) = f_{xx}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) f_{yy}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) - f_{xy}^2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ &= \left(2\sqrt{2}e^{-1/2}\right) \left(\sqrt{2}e^{-1/2}\right) - 0 \\ &= 4e^{-1} = \frac{4}{e} > 0 \end{aligned}$$

$$f_{xx}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 2\sqrt{2}e^{-1/2} > 0$$

O ponto $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ é um mínimo local

Exemplo 7

Considerando a função $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$

- a) Calcule o gradiente de f
- b) Calcule a hessiana de f
- c) Encontre todos os pontos críticos de f
- d) Classifique cada ponto crítico de f

Exemplo 7 – a – Gradiente de f

Derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [x^3 + 3xy + y^3] = 3x^2 + 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [x^3 + 3xy + y^3] = 3x + 3y^2$$

então

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y \\ 3x + 3y^2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 7 – b – Hessiana de f

Derivadas parciais de segunda ordem de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} [3x^2 + 3y] = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} [3x + 3y^2] = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} [3x + 3y^2] = 3$$

então

$$H = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}$$

Exemplo 7 – c – Pontos Críticos de f

A função é um polinômio, então possui derivadas em todos os pontos do plano

Os pontos críticos são apenas onde as derivadas parciais são zero, $\nabla f = 0$

$$3x^2 + 3y = 0 \quad \text{e} \quad 3x + 3y^2 = 0$$

simplificando

$$x^2 + y = 0 \quad \text{e} \quad x + y^2 = 0$$

Exemplo 7 – c – Pontos Críticos de f

Isolando y na primeira equação

$$x^2 + y = 0$$

$$y = -x^2$$

e substituindo na segunda

$$x + y^2 = 0$$

$$x + (-x^2)^2 = 0$$

$$x + x^4 = 0$$

$$x(1 + x^3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 1 + x^3 = 0$$

$$x^3 = -1$$

$$x = \sqrt[3]{-1}$$

$$x = -1$$

As soluções dessa equação são

$$x = 0 \text{ ou } x = -1$$

Exemplo 7 – c-Pontos Críticos de f

Como $y = -x^2$

se $x = 0$, então $y = 0$

se $x = -1$, então $y = -1$

os pontos críticos são

$$(x_1, y_1) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (x_2, y_2) = (-1, -1)$$

Exemplo 7 – d – Classificando os Pontos

Considerando o ponto $(x_1, y_1) = (0, 0)$

$$f_{xx}(0, 0) = (6x) \Big|_{(0,0)} = 0$$

$$f_{yy}(0, 0) = (6y) \Big|_{(0,0)} = 0$$

$$f_{xy}(0, 0) = 3$$

$$D_1 = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 0 \times 0 - 3^2 = -9 < 0$$

Portanto, o ponto $(0, 0)$ é um **ponto de sela**

Exemplo 7 – d – Classificando os Pontos

Considerando o ponto $(x_2, y_2) = (-1, -1)$

$$f_{xx}(-1, -1) = (6x) \Big|_{(-1, -1)} = -6$$

$$f_{yy}(-1, -1) = (6y) \Big|_{(-1, -1)} = -6$$

$$f_{xy}(-1, -1) = 3$$

$$D_2 = f_{xx}(-1, -1)f_{yy}(-1, -1) - f_{xy}^2(-1, -1) = (-6)(-6) - 3^2 = 36 - 9 = 27 > 0$$

Portanto, o ponto $(-1, -1)$ é um máximo ou mínimo local

Como $f_{xx}(-1, -1) = -6 < 0$ o ponto é um ponto de **máximo local**

Exemplo 8

Considerando a função $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$

- a) Calcule o gradiente de f
- b) Calcule a hessiana de f
- c) Encontre todos os pontos críticos de f
- d) Classifique cada ponto crítico de f

Exemplo 8 – a – Gradiente de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [4xy - x^4 - y^4] = 4y - 4x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [4xy - x^4 - y^4] = 4x - 4y^3$$

então $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4y - 4x^3 \\ 4x - 4y^3 \end{pmatrix}$

Exemplo 8 – b – Hessiana de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} [4y - 4x^3] = -12x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} [4x - 4y^3] = -12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} [4x - 4y^3] = 4$$

$$\text{então} \quad H(x, y) = \begin{pmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – c – Pontos críticos de f

A função é um polinômio, então possui derivadas em todos os pontos do plano

Assim os pontos críticos são apenas os pontos onde $\nabla f = 0$

$$4y - 4x^3 = 0 \quad \text{e} \quad 4x - 4y^3 = 0$$

ou

$$y - x^3 = 0 \quad \text{e} \quad x - y^3 = 0$$

Exemplo 8 – c – Resolvendo o sistema

Isolando y na primeira equação

$$y - x^3 = 0$$

$$y = x^3$$

e substituindo na segunda

$$x - y^3 = 0$$

$$x - (x^3)^3 = 0$$

$$x - x^9 = 0$$

$$x(1 - x^8) = 0$$

As soluções dessa equação são

$$x = 0, x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Exemplo 8 – c – Resolvendo o sistema

Como $y = x^3$

Se $x = 0$ temos $y = 0$

Se $x = 1$ temos $y = 1$

Se $x = -1$ temos $y = -1$

Os pontos críticos são

$$(x_1, y_1) = (0, 0), \quad (x_2, y_2) = (1, 1) \quad \text{e} \quad (x_3, y_3) = (-1, -1)$$

Exemplo 8 – d – Classificando o ponto $(x_1, y_1) = (0, 0)$

$$f_{xx}(0, 0) = (-12x^2) \Big|_{(0,0)} = 0$$

$$f_{yy}(0, 0) = (-12y^2) \Big|_{(0,0)} = 0$$

$$f_{xy}(0, 0) = (4) \Big|_{(0,0)} = 4$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \det H(0, 0) \\ &= f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) \\ &= 0 \times 0 - 4^2 \\ &= -16 < 0 \end{aligned}$$

O ponto $(0, 0)$ é um **ponto de sela**

Exemplo 8 – d – Classificando o ponto $(x_2, y_2) = (1, 1)$

$$\begin{aligned} f_{xx}(1, 1) &= (-12x^2) \Big|_{(1,1)} = -12 & D_2 &= \det H(1, 1) \\ & & &= f_{xx}(1, 1)f_{yy}(1, 1) - f_{xy}^2(1, 1) \\ f_{yy}(1, 1) &= (-12y^2) \Big|_{(1,1)} = -12 & &= (-12)(-12) - 4^2 \\ & & &= 144 - 16 \\ f_{xy}(1, 1) &= (-12x^2) \Big|_{(1,1)} = 4 & &= 128 > 0 \end{aligned}$$

O ponto $(1, 1)$ é um extremo local

Como $f_{xx}(1, 1) = -12 < 0$ o ponto é um **máximo local**

Exemplo 8 – d – Classificando o ponto $(x_3, y_3) = (-1, -1)$

$$\begin{aligned} f_{xx}(-1, -1) &= (-12x^2) \Big|_{(-1, -1)} = -12 & D_3 &= \det H(-1, -1) \\ & & &= f_{xx}(-1, -1)f_{yy}(-1, -1) - f_{xy}^2(-1, -1) \\ f_{yy}(-1, -1) &= (-12x^2) \Big|_{(-1, -1)} = -12 & &= (-12)(-12) - 4^2 \\ & & &= 144 - 16 \\ f_{xy}(-1, -1) &= (-12x^2) \Big|_{(-1, -1)} = 4 & &= 128 > 0 \end{aligned}$$

O ponto $(-1, -1)$ é um extremo local

Como $f_{xx}(-1, -1) = -12 < 0$ o ponto é um **máximo local**

Exemplo 9

Considerando a função $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$

- a) Calcule o gradiente de f
- b) Calcule a hessiana de f
- c) Encontre todos os pontos críticos de f
- d) Classifique cada ponto crítico de f

Exemplo 9 – a – Gradiente de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [x^4 + y^4 + 4xy] = 4x^3 + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [x^4 + y^4 + 4xy] = 4y^3 + 4x$$

então $\nabla f = \begin{pmatrix} 4x^3 + 4y \\ 4y^3 + 4x \end{pmatrix}$

Exemplo 9 – b – Hessiana de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} [4x^3 + 4y] = 12x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} [4y^3 + 4x] = 12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} [4y^3 + 4x] = 4$$

então
$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 & 4 \\ 4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – c – Pontos críticos

A função é um polinômio, então possui derivadas em todos os pontos do plano

Assim os pontos críticos são apenas os pontos onde $\nabla f = 0$

$$4x^3 + 4y = 0 \quad \text{e} \quad 4y^3 + 4x = 0$$

ou

$$x^3 + y = 0 \quad \text{e} \quad y^3 + x = 0$$

Exemplo 9 – c – Resolvendo o sistema

Isolando y na primeira equação, $y = -x^3$, e substituindo na segunda, temos

$$y^3 + x = 0$$

$$(-x^3)^3 + x = 0$$

$$-x^9 + x = 0$$

$$x^9 - x = 0$$

$$x(x^8 - 1) = 0$$

As soluções dessa equação são $x = 0$, $x = 1$ ou $x = -1$. Se $x = 0$ temos $y = 0$, se $x = 1$ temos $y = -1$ e se $x = -1$ temos $y = 1$. Portanto, os pontos críticos são

$$(x_1, y_1) = (0, 0), \quad (x_2, y_2) = (1, -1) \quad \text{e} \quad (x_3, y_3) = (-1, 1)$$

Exemplo 9 – d – Classificando o ponto $(x_1, y_1) = (0, 0)$

$$f_{xx}(0, 0) = 0$$

$$f_{yy}(0, 0) = 0$$

$$f_{xy}(0, 0) = 4$$

$$D_1 = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 0 \times 0 - 4^2 = -16 < 0$$

Portanto, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela.

Exemplo 9 – d – Classificando o ponto $(x_2, y_2) = (1, -1)$

$$f_{xx}(1, -1) = 12$$

$$f_{yy}(1, -1) = 12$$

$$f_{xy}(1, -1) = 4$$

$$D_2 = f_{xx}(1, -1)f_{yy}(1, -1) - f_{xy}^2(1, -1) = 12 \times 12 - 4^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

Portanto, o ponto $(1, -1)$ é um máximo ou mínimo local. Como

$f_{xx}(1, -1) = 12 > 0$ o ponto é um ponto de mínimo local.

Exemplo 9 – d – Classificando o ponto $(x_3, y_3) = (-1, 1)$

$$f_{xx}(-1, 1) = 12$$

$$f_{yy}(-1, 1) = 12$$

$$f_{xy}(-1, 1) = 4$$

$$D_3 = f_{xx}(-1, 1)f_{yy}(-1, 1) - f_{xy}^2(-1, 1) = 12 \times 12 - 4^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

Portanto, o ponto $(-1, 1)$ é um máximo ou mínimo local. Como

$f_{xx}(-1, 1) = 12 > 0$ o ponto é um ponto de mínimo local.

Conteúdo

Extremos locais

Teste da derivada segunda

Exemplos

Lista mínima

Lista mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 14.7

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 2, 9, 11, 21, 23, 24, 25, 27

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações