

Números Complexos

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/pages/cfvv1>

Conteúdo

Unidade Imaginária

Números Complexos

Operações com números complexos

Lista Mínima

Motivação

Considere a equação

$$x^2 + 1 = 0$$

Manipulando formalmente temos a solução

$$x = \sqrt{-1}$$

Porém, $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Não existe $\sqrt{-1}$ dentro dos números reais

Unidade imaginária

Unidade imaginária

$$i^2 = -1 \quad \text{ou} \quad i = \sqrt{-1}$$

A Engenharia Elétrica usa $j^2 = -1$

Propriedades de Potências

$$a^p a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

Potências de i

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$$

$$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 i = 1i = i$$

$$i^6 = i^4 i^2 = 1(-1) = -1$$

$$i^7 = i^4 i^3 = 1(-i) = -i$$

$$i^8 = i^4 i^4 = 1 \times 1 = 1$$

$$i^0 = 1$$

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{1} = i$$

$$i^{75} = ?$$

Potências de i

Para uma potência n inteira

Dividimos n por 4

$$\begin{array}{r|l} n & 4 \\ \hline r & q \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 75 & 4 \\ \hline 3 & 18 \end{array}$$

Assim

$$n = 4q + r$$

$$75 = 4 \times 18 + 3$$

$$i^n = i^{4q+r}$$

$$= i^{4q} i^r$$

$$= (i^4)^q i^r$$

$$= (1)^q i^r$$

$$= i^r$$

$$i^{75} = i^3 = -i$$

Raízes de Números Negativos

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{(-1) a^2} = i\sqrt{a^2} = ai$$

Cuidado com raízes

Sabemos que

$$\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

Por exemplo

$$\sqrt{9} \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$$

$$\sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{-9} \sqrt{-4} = 3i \times 2i = 6i^2 = -6$$

$$\sqrt{(-9)(-4)} = \sqrt{36} = 6$$

Só é verdade para a e b positivos!

Exemplo 1

Simplifique as expressões

$$a = i^7$$

$$b = i^{57}$$

$$c = \frac{i^5 + i^{17}}{i^3}$$

Exemplo 1 – Solução

$$a = i^7 = i^4 i^3 = i^3 = i^2 i = -i$$

Exemplo 1 – Solução

$$b = i^{57} = i^{4 \times 14} i^1 = i$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}c &= \frac{i^5 + i^{17}}{i^3} = \frac{i^5}{i^3} + \frac{i^{17}}{i^3} = i^{5-3} + i^{17-3} \\&= i^2 + i^{14} = -1 + i^{4 \times 3 + 2} = -1 + i^2 \\&= -1 - 1 = -2\end{aligned}$$

Conteúdo

Unidade Imaginária

Números Complexos

Operações com números complexos

Lista Mínima

Números complexos

Conjunto dos Números Complexos

$$\mathbb{C} = \{ z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

Parte real de z

$$\operatorname{Re}(z) = a$$

Parte imaginária de z

$$\operatorname{Im}(z) = b$$

Os números complexos com parte imaginária nula são os Reais

Conteúdo

Unidade Imaginária

Números Complexos

Operações com números complexos

Lista Mínima

Igualdade entre números complexos

$$z_1 = a + bi \text{ é igual a } z_2 = p + qi$$

se, e somente se,

$$a = p \quad \text{e} \quad b = q$$

Soma e subtração de números complexos

Soma

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (p + qi) = a + bi + p + qi = (a + p) + (b + q)i$$

Subtração

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (p + qi) = a + bi - p - qi = (a - p) + (b - q)i$$

Produto de números complexos

Produto

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (a + bi)(p + qi) \\&= a(p + qi) + bi(p + qi) \\&= ap + aqi + bpi + bqi^2 \\&= ap + aqi + bpi - bq \\&= (ap - bq) + (aq + bp)i\end{aligned}$$

Conjugado

O **conjugado** do número complexo

$$z = a + bi$$

é o número

$$\bar{z} = a - bi$$

Propriedades dos conjugados

1. $\overline{\overline{z}} = z$

2. se $\bar{z} = z$ então z é real

3.
$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Divisão de Números Complexos

Dividir $z_1 = a + bi$ por $z_2 = p + qi$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{p + qi} = ?$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$$

$$= \frac{(a + bi)(p - qi)}{(p + qi)(p - qi)} = \frac{ap - aqi + bpi - bqi^2}{p^2 + q^2} = \frac{(ap + bq) + (bp - aq)i}{p^2 + q^2}$$

$$= \left(\frac{ap + bq}{p^2 + q^2} \right) + \left(\frac{bp - aq}{p^2 + q^2} \right) i$$

Corpo complexo

A soma e o produto nos complexos tem as mesmas propriedades dos reais

Por isso o conjunto dos complexos é chamado **corpo**

Exemplos de corpos: racionais, reais, complexos

Exemplo 2

Calcule

$$a = [(3 + 2i) + (4 - 5i)](1 + i)$$

$$b = [(2 + 3i)(1 - i)] [(1 + 2i)(2 - i)]$$

$$c = \frac{3 + 4i}{2 - i}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}a &= [(3 + 2i) + (4 - 5i)](1 + i) \\&= [7 - 3i](1 + i) \\&= 7 + 7i - 3i - 3i^2 \\&= 7 + 7i - 3i + 3 \\&= 10 + 4i\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned} b &= [(2 + 3i)(1 - i)][(1 + 2i)(2 - i)] \\ &= [2 - 2i + 3i - 3i^2] [2 - i + 4i - 2i^2] \\ &= [2 - 2i + 3i + 3][2 - i + 4i + 2] \\ &= (5 + i)(4 + 3i) \\ &= 20 + 15i + 4i + 3i^2 \\ &= 20 + 15i + 4i - 3 \\ &= 17 + 19i \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}c &= \frac{3 + 4i}{2 - i} \\&= \frac{(3 + 4i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} \\&= \frac{6 + 3i + 8i - 4}{4 + 2i - 2i + 1} \\&= \frac{2 + 11i}{5} \\&= \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i\end{aligned}$$

Conteúdo

Unidade Imaginária

Números Complexos

Operações com números complexos

Lista Mínima

Lista Mínima

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações