

Curvas Paramétricas

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/pages/cfvv1>

Conteúdo

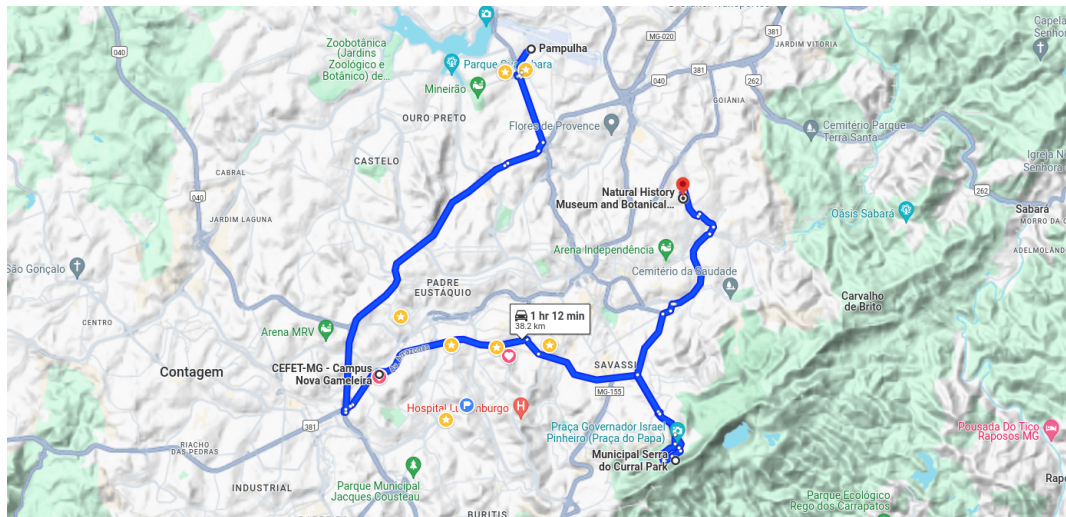
Introdução

Curvas Paramétricas

Exemplos

Lista Mínima

Trajeto



Curvas Paramétricas

Função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$

Curvas Paramétricas

Função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = (x, y)$$

Curvas Paramétricas

Função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = (x, y) = (f(t), g(t))$$

Curvas Paramétricas

Função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = (x, y) = (f(t), g(t))$$

ou

Curvas Paramétricas

Função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = (x, y) = (f(t), g(t))$$

ou

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Curvas Paramétricas

Função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = (x, y) = (f(t), g(t))$$

ou

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

Curvas Paramétricas

Função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = (x, y) = (f(t), g(t))$$

ou

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

ou

$$\gamma(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

Curvas Paramétricas

Função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = (x, y) = (f(t), g(t))$$

ou

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

ou

$$\gamma(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

Curvas Paramétricas

Função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = (x, y) = (f(t), g(t))$$

ou

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

ou

$$\gamma(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

Podemos pensar na variável como o tempo e a curva como uma trajetória

Conteúdo

Introdução

Curvas Paramétricas

Exemplos

Lista Mínima

Definição em 2D

Se x e y

Definição em 2D

Se x e y são dados como funções

Definição em 2D

Se x e y são dados como funções

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

Definição em 2D

Se x e y são dados como funções

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

sobre um intervalo I de valores de t ,

Definição em 2D

Se x e y são dados como funções

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

sobre um intervalo I de valores de t , então o conjunto de pontos

$$(x, y) = (f(t), g(t))$$

Definição em 2D

Se x e y são dados como funções

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

sobre um intervalo I de valores de t , então o conjunto de pontos

$$(x, y) = (f(t), g(t))$$

forma uma **curva paramétrica** em $\mathbb{R}^2$

Definição em 3D

Se x , y e z são dados como funções

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t)$$

sobre um intervalo I de valores de t , então o conjunto de pontos

$$(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$$

forma uma **curva paramétrica** em $\mathbb{R}^3$

Definição Geral

Se x_i , $i = 1, \dots, n$ são as coordenadas no espaço $\mathbb{R}^n$

$$x_i = f_i(t)$$

sobre um intervalo I de valores de t , então o conjunto de pontos

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

forma uma **curva paramétrica** em $\mathbb{R}^n$

Nomenclatura

As equações são as equações paramétricas da curva

Nomenclatura

As equações são as equações paramétricas da curva

t é o parâmetro da curva

Nomenclatura

As equações são as equações paramétricas da curva

t é o parâmetro da curva

I intervalo do parâmetro

Nomenclatura

As equações são as equações paramétricas da curva

t é o parâmetro da curva

I intervalo do parâmetro

Se I é um intervalo fechado $a \leq t \leq b$

Nomenclatura

As equações são as equações paramétricas da curva

t é o parâmetro da curva

I intervalo do parâmetro

Se I é um intervalo fechado $a \leq t \leq b$

$(f(a), g(a))$ é o ponto inicial

Nomenclatura

As equações são as equações paramétricas da curva

t é o parâmetro da curva

I intervalo do parâmetro

Se I é um intervalo fechado $a \leq t \leq b$

$(f(a), g(a))$ é o ponto inicial

$(f(b), g(b))$ é o ponto final

Notações

Depende do contexto e da área do conhecimento

Notações

Depende do contexto e da área do conhecimento

$$(x, y) = (x(t), y(t)) = (f(t), g(t))$$

Notações

Depende do contexto e da área do conhecimento

$$(x, y) = (x(t), y(t)) = (f(t), g(t))$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

Notações

Depende do contexto e da área do conhecimento

$$(x, y) = (x(t), y(t)) = (f(t), g(t))$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

Notações

Depende do contexto e da área do conhecimento

$$(x, y) = (x(t), y(t)) = (f(t), g(t))$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

$$\gamma(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

Notações

Depende do contexto e da área do conhecimento

$$(x, y) = (x(t), y(t)) = (f(t), g(t))$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

$$\gamma(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

Conteúdo

Introdução

Curvas Paramétricas

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 1

Trace a curva definida pelas equações paramétricas

$$x = t^2 \quad y = t + 1 \quad -\infty < t < \infty$$

Exemplo 1 – Solução

Note que

Exemplo 1 – Solução

Note que

y varia com t e

Exemplo 1 – Solução

Note que

y varia com t e

x varia com t^2

Exemplo 1 – Solução

Note que

y varia com t e

x varia com t^2

então a curva é uma parábola

Exemplo 1 – Solução

Note que

y varia com t e

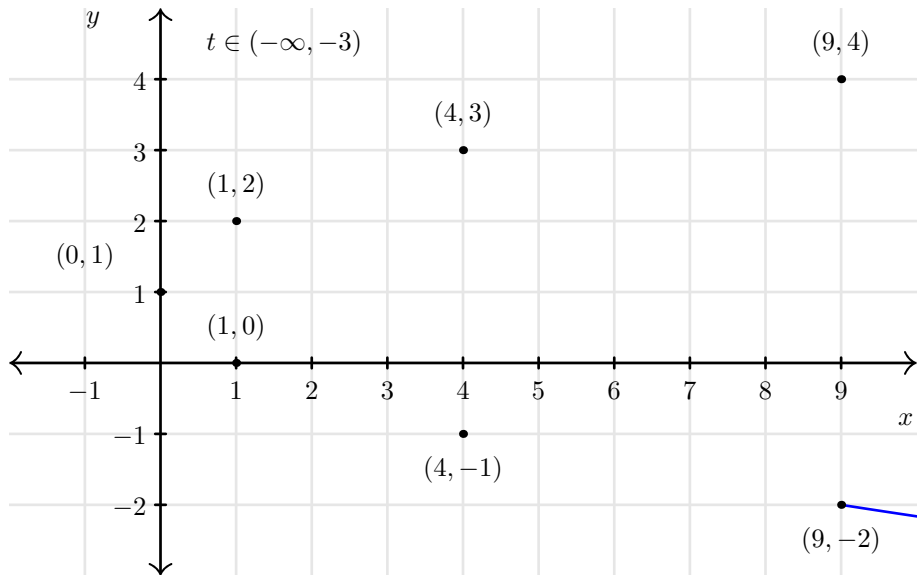
x varia com t^2

então a curva é uma parábola

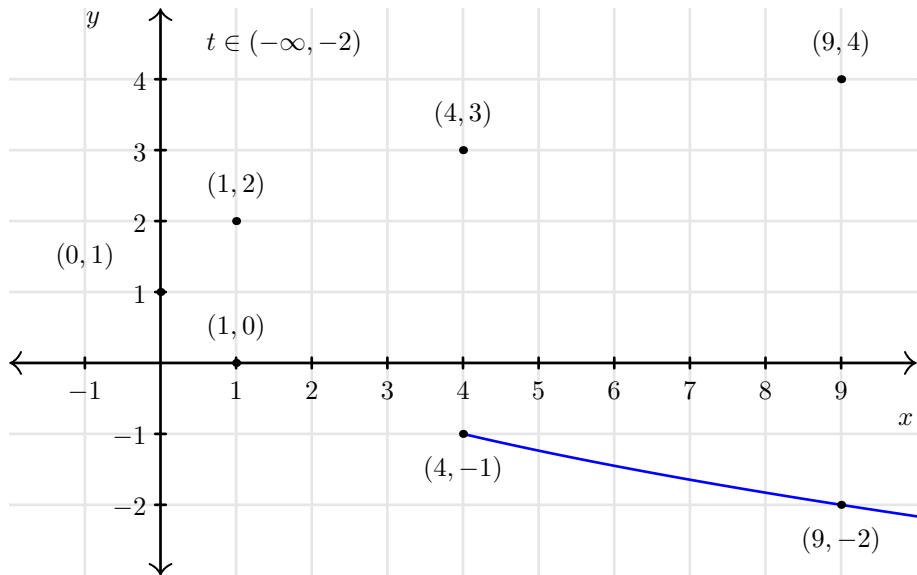
Calculando alguns pontos

t	x	y
-3	9	-2
-2	4	-1
-1	1	0
0	0	1
1	1	2
2	4	3
3	9	4

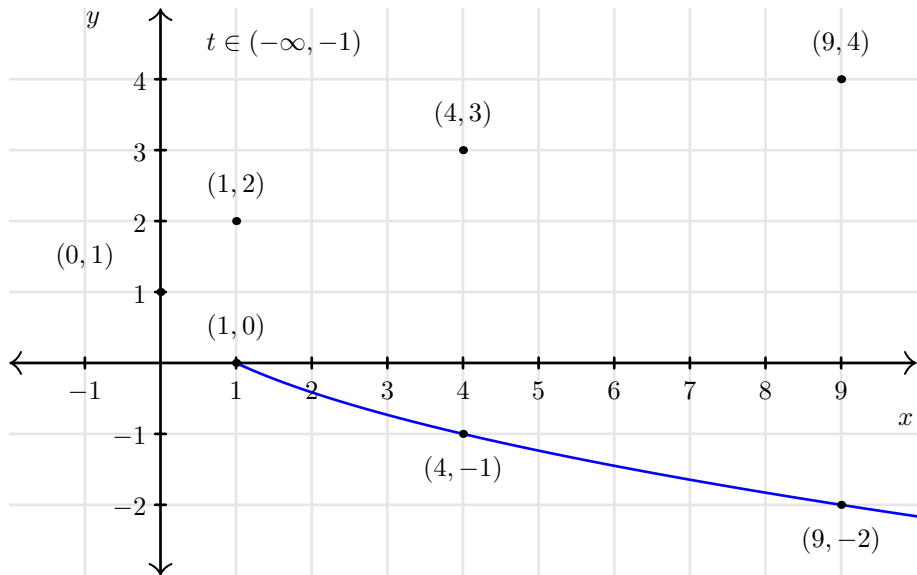
Exemplo 1 – Solução



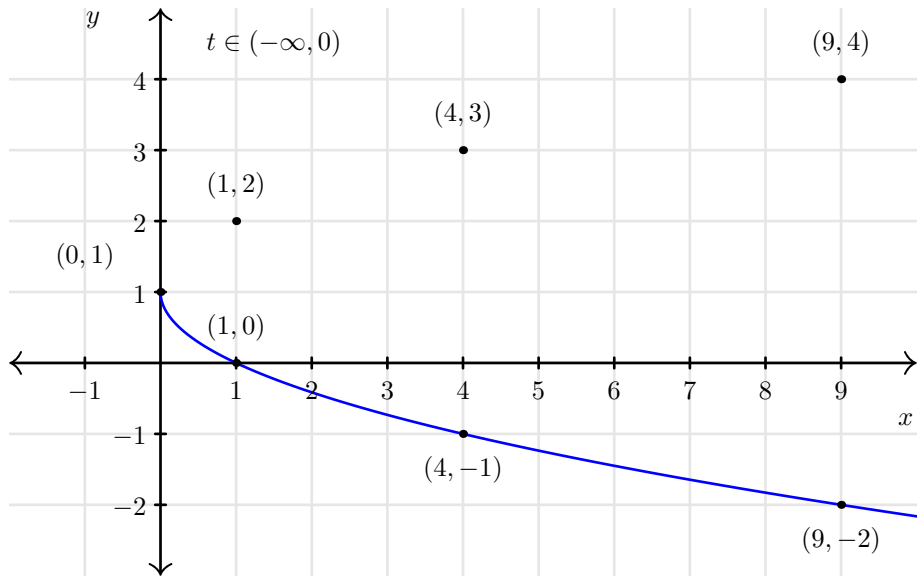
Exemplo 1 – Solução



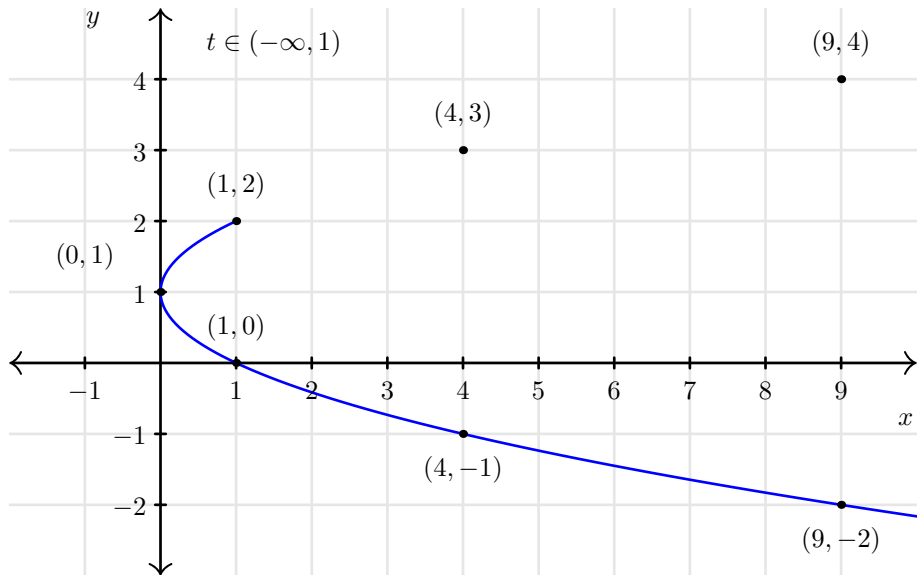
Exemplo 1 – Solução



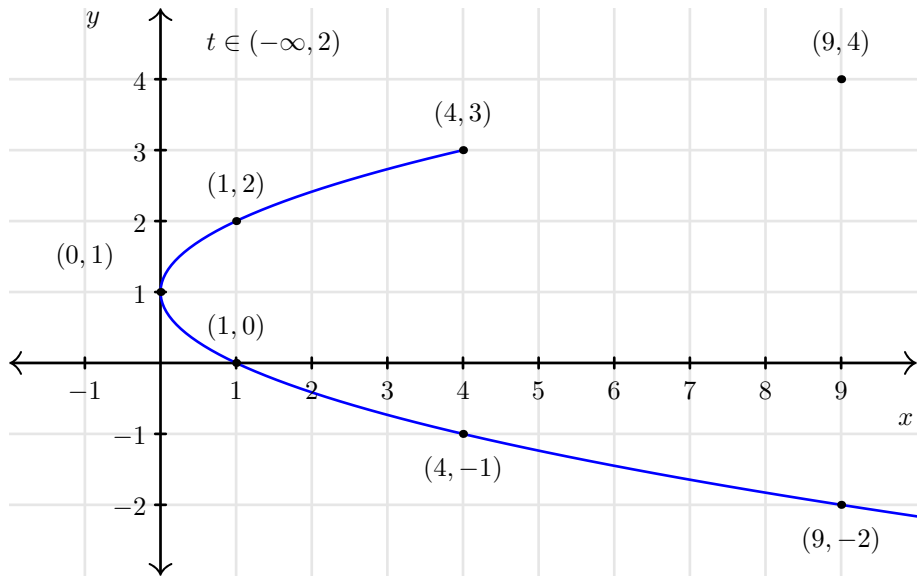
Exemplo 1 – Solução



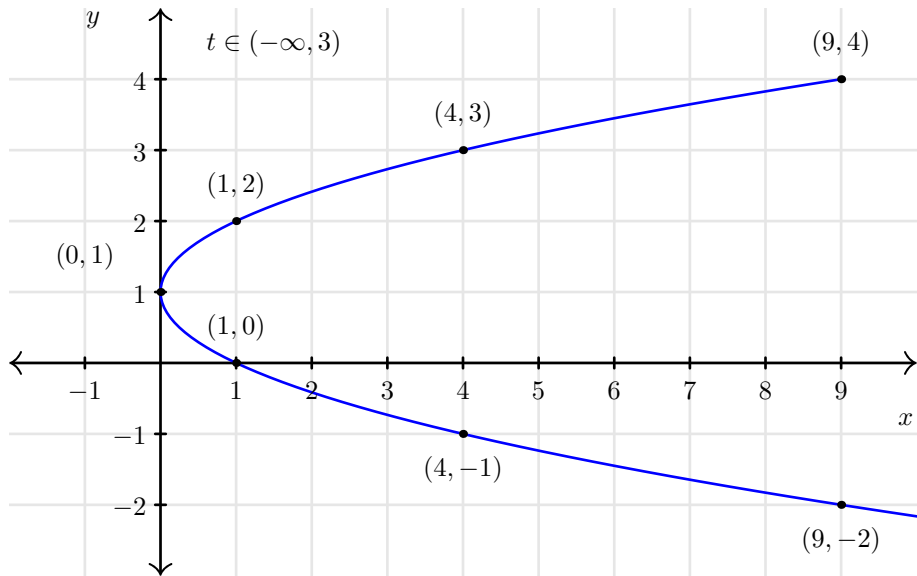
Exemplo 1 – Solução



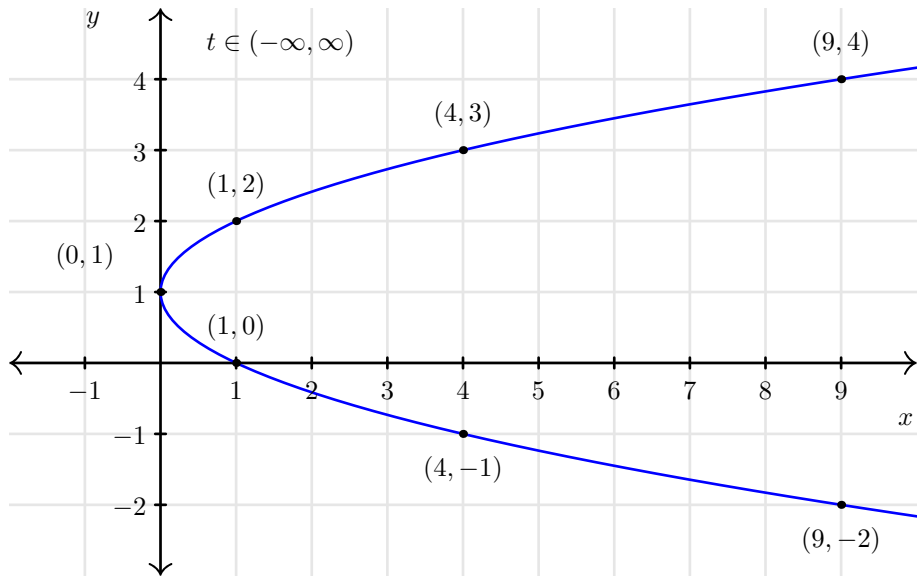
Exemplo 1 – Solução



Exemplo 1 – Solução



Exemplo 1 – Solução



Exemplo 2

Identifique geometricamente a curva do Exemplo 1 eliminando o parâmetro t

$$x = t^2 \quad y = t + 1 \quad -\infty < t < \infty$$

Exemplo 2

Identifique geometricamente a curva do Exemplo 1 eliminando o parâmetro t

$$x = t^2 \quad y = t + 1 \quad -\infty < t < \infty$$

Transformar a curva paramétrica em t em uma equação envolvendo x e y

Exemplo 2 – Solução

Eliminar t em

$$x = t^2$$

$$y = t + 1$$

Exemplo 2 – Solução

Eliminar t em

$$x = t^2$$

$$y = t + 1$$

$$y = t + 1$$

Exemplo 2 – Solução

Eliminar t em

$$x = t^2$$

$$y = t + 1$$

$$y = t + 1$$

$$t = y - 1$$

Exemplo 2 – Solução

Eliminar t em

$$x = t^2$$

$$y = t + 1$$

$$y = t + 1$$

$$t = y - 1$$

$$x = t^2$$

Exemplo 2 – Solução

Eliminar t em

$$x = t^2$$

$$y = t + 1$$

$$y = t + 1$$

$$t = y - 1$$

$$x = t^2$$

$$= (y - 1)^2$$

Exemplo 2 – Solução

Eliminar t em

$$x = t^2$$

$$y = t + 1$$

$$y = t + 1$$

$$t = y - 1$$

$$x = t^2$$

$$= (y - 1)^2$$

$$= y^2 - 2y + 1$$

Exemplo 3

Determine se os pontos $(2, 3)$ e $(4, -1)$ pertencem à curva paramétrica

$$x = t^2 \quad y = t + 1 \quad -\infty < t < \infty$$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

$$t = 3 - 1$$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

$$t = 3 - 1 = 2$$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

$$t = 3 - 1 = 2$$

$$x = t^2$$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

$$t = 3 - 1 = 2$$

$$x = t^2 = 2^2$$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

$$t = 3 - 1 = 2$$

$$x = t^2 = 2^2 = 4$$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

$$t = 3 - 1 = 2$$

$$x = t^2 = 2^2 = 4 \neq 2$$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

$$t = 3 - 1 = 2$$

$$x = t^2 = 2^2 = 4 \neq 2$$

O ponto não pertence a curva

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

$$t = 3 - 1 = 2$$

$$x = t^2 = 2^2 = 4 \neq 2$$

O ponto não pertence a curva

Testando o ponto $(4, -1)$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

$$t = 3 - 1 = 2$$

$$x = t^2 = 2^2 = 4 \neq 2$$

O ponto não pertence a curva

Testando o ponto $(4, -1)$

$$y = -1$$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

$$t = 3 - 1 = 2$$

$$x = t^2 = 2^2 = 4 \neq 2$$

O ponto não pertence a curva

Testando o ponto $(4, -1)$

$$y = -1$$

$$t + 1 = -1$$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

$$t = 3 - 1 = 2$$

$$x = t^2 = 2^2 = 4 \neq 2$$

O ponto não pertence a curva

Testando o ponto $(4, -1)$

$$y = -1$$

$$t + 1 = -1$$

$$t = -1 - 1$$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

$$t = 3 - 1 = 2$$

$$x = t^2 = 2^2 = 4 \neq 2$$

O ponto não pertence a curva

Testando o ponto $(4, -1)$

$$y = -1$$

$$t + 1 = -1$$

$$t = -1 - 1 = -2$$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

$$t = 3 - 1 = 2$$

$$x = t^2 = 2^2 = 4 \neq 2$$

O ponto não pertence a curva

Testando o ponto $(4, -1)$

$$y = -1$$

$$t + 1 = -1$$

$$t = -1 - 1 = -2$$

$$x = t^2$$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

$$t = 3 - 1 = 2$$

$$x = t^2 = 2^2 = 4 \neq 2$$

O ponto não pertence a curva

Testando o ponto $(4, -1)$

$$y = -1$$

$$t + 1 = -1$$

$$t = -1 - 1 = -2$$

$$x = t^2 = (-2)^2$$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

$$t = 3 - 1 = 2$$

$$x = t^2 = 2^2 = 4 \neq 2$$

O ponto não pertence a curva

Testando o ponto $(4, -1)$

$$y = -1$$

$$t + 1 = -1$$

$$t = -1 - 1 = -2$$

$$x = t^2 = (-2)^2 = 4$$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

$$t = 3 - 1 = 2$$

$$x = t^2 = 2^2 = 4 \neq 2$$

O ponto não pertence a curva

Testando o ponto $(4, -1)$

$$y = -1$$

$$t + 1 = -1$$

$$t = -1 - 1 = -2$$

$$x = t^2 = (-2)^2 = 4$$

O ponto pertence a curva

Exemplo 4

Represente graficamente a curva paramétrica

$$x = \cos(t) \quad y = \sin(t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Exemplo 4 – Solução

Sabemos que essa é a parametrização do círculo trigonométrico

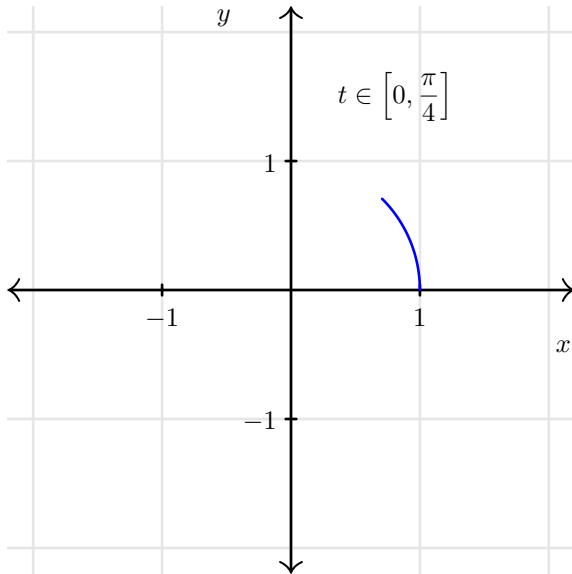
Exemplo 4 – Solução

Sabemos que essa é a parametrização do círculo trigonométrico

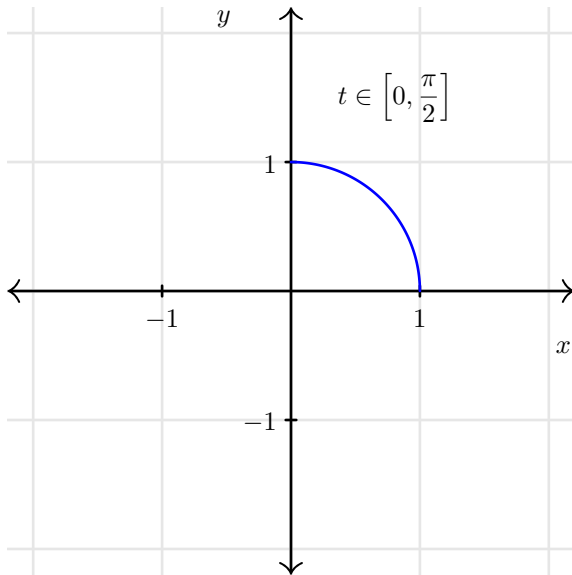
Calculando alguns pontos

t	x	y
0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1
2π	1	0

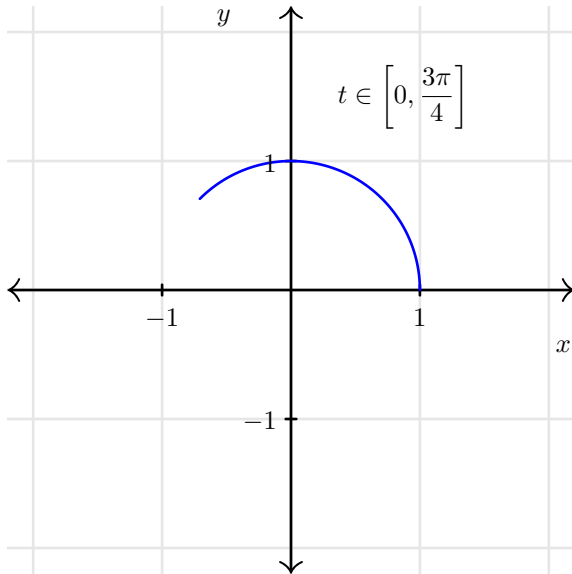
Exemplo 4 – Solução



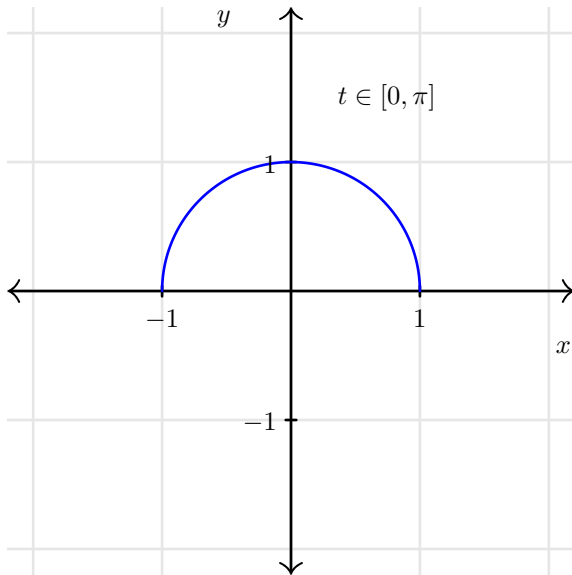
Exemplo 4 – Solução



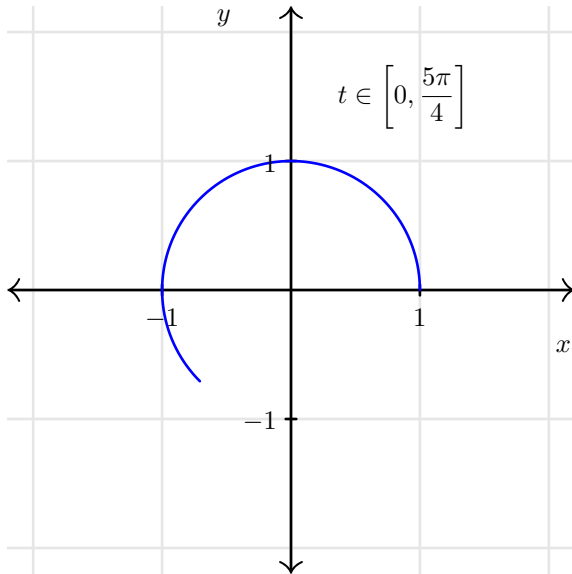
Exemplo 4 – Solução



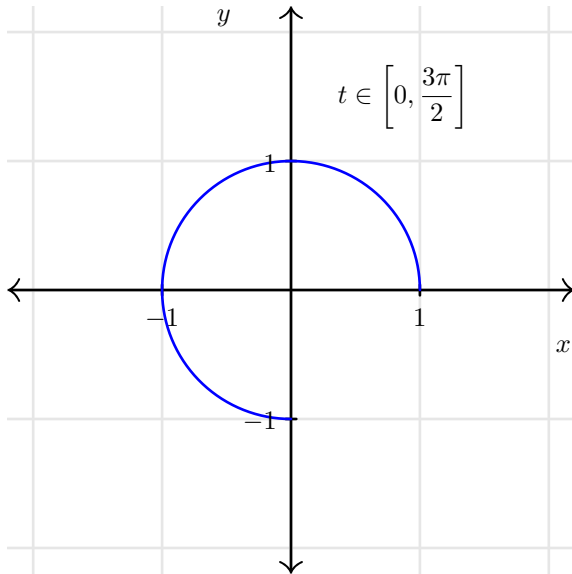
Exemplo 4 – Solução



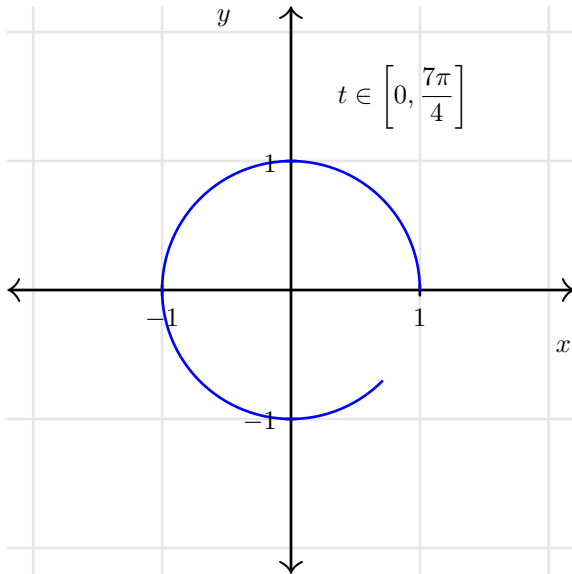
Exemplo 4 – Solução



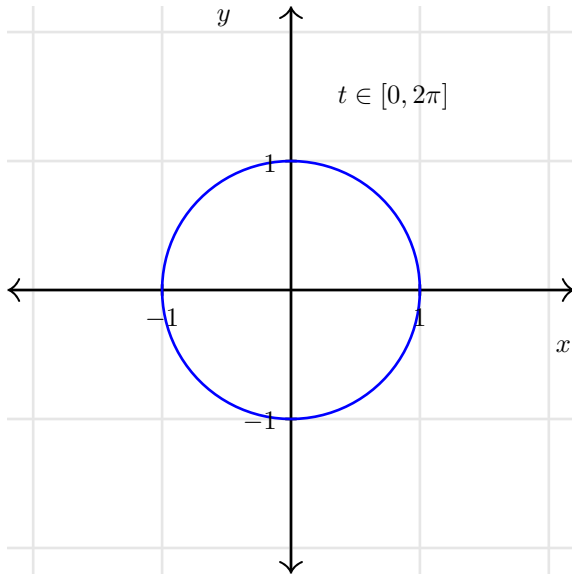
Exemplo 4 – Solução



Exemplo 4 – Solução



Exemplo 4 – Solução



Exemplo 5

Esboce a trajetória definida pela curva paramétrica

$$\begin{cases} x = t \cos(t\pi) \\ y = t \sin(t\pi) \end{cases}$$

$$0 \leq t$$

Exemplo 5 – Solução

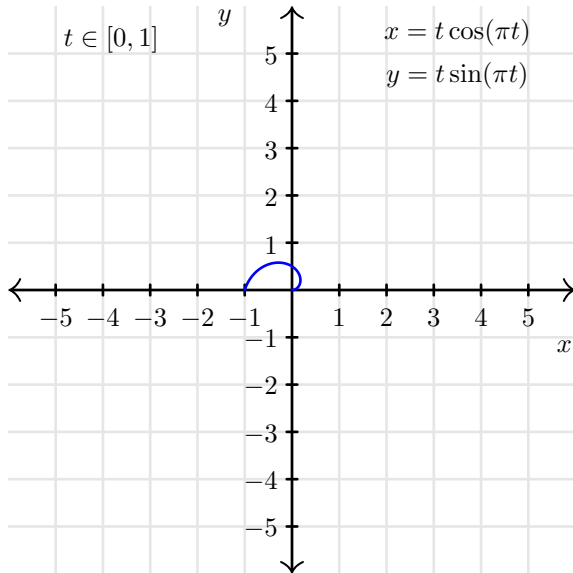
Similar a parametrização do círculo trigonométrico

Exemplo 5 – Solução

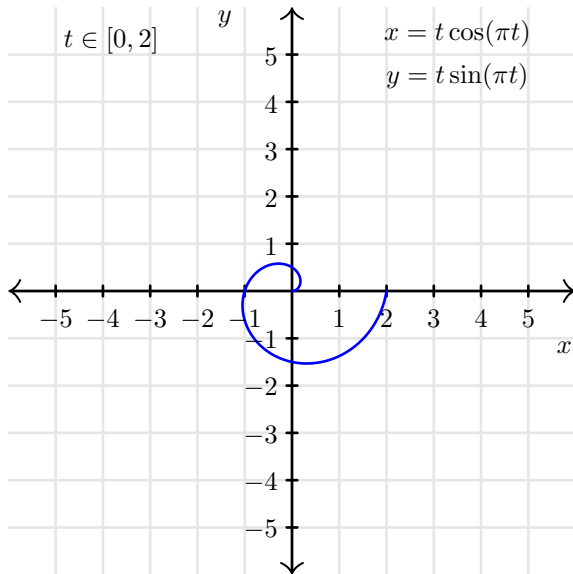
Similar a parametrização do círculo trigonométrico

t	$t\pi$	$\cos(t\pi)$	$\text{sen}(t\pi)$	x	y
0	0	1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$
1	π	-1	0	-1	0
$\frac{3}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	0	-1	0	$-\frac{3}{2}$
2	2π	1	0	2	0

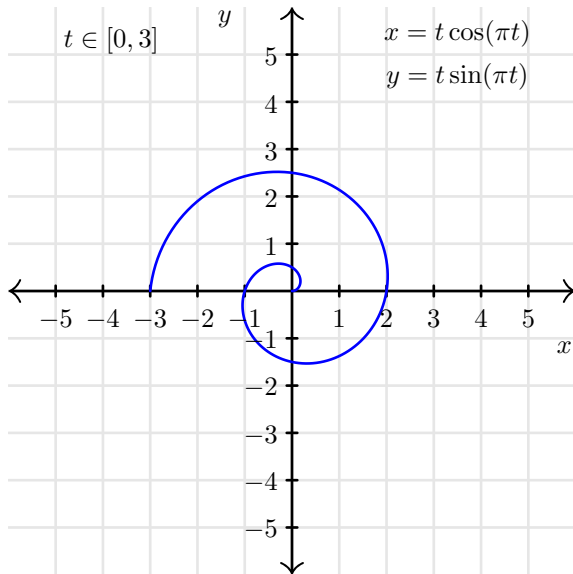
Exemplo 5 – Solução



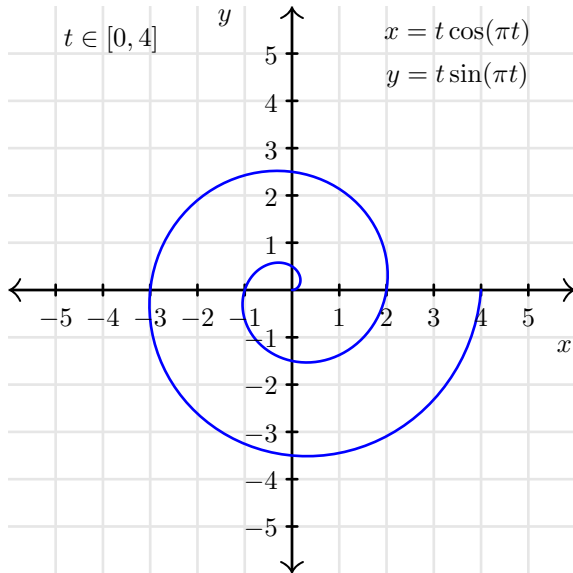
Exemplo 5 – Solução



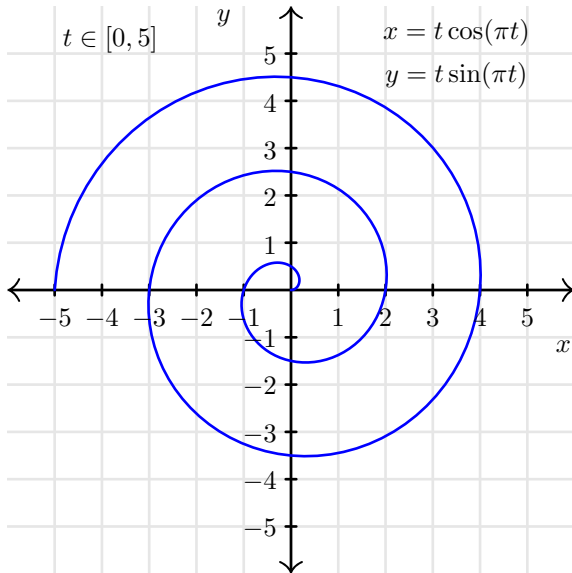
Exemplo 5 – Solução



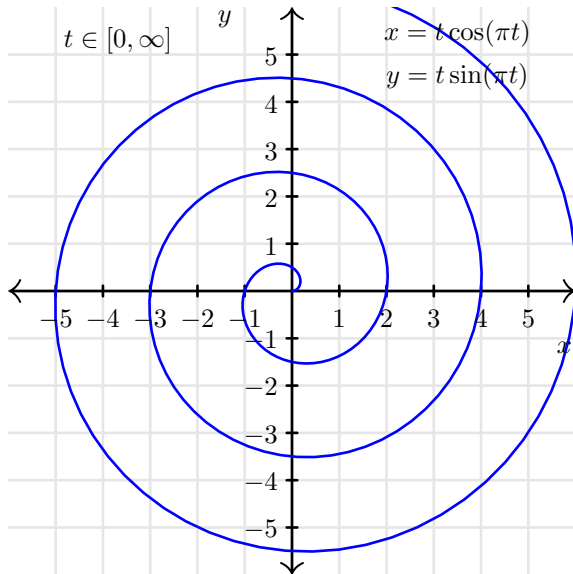
Exemplo 5 – Solução



Exemplo 5 – Solução



Exemplo 5 – Solução



Exemplo 6

A posição de uma partícula se movendo no plano xy é dada por

$$x = \sqrt{t} \quad y = t \quad t \geq 0$$

Esboce sua trajetória

Exemplo 6 – Solução

Eliminando t em

$$x = \sqrt{t}$$

$$y = t$$

temos

$$x = \sqrt{t} = \sqrt{y}$$

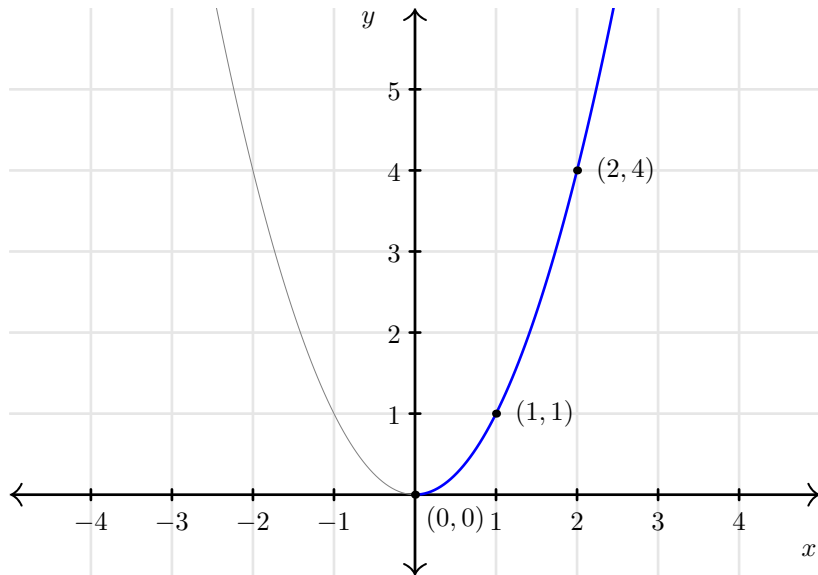
Elevando os dois lados ao quadrado

$$x = \sqrt{y}$$

$$x^2 = (\sqrt{y})^2 = |y| = y$$

$$y = x^2$$

Exemplo 6 – Solução



Exemplo 7

Construa uma curva paramétrica cuja trajetória seja uma circunferência de raio 2 centrada em $(3, 4)$

Exemplo 7 – Solução

Sabemos que

$$x = \cos(t)$$

$$y = \sin(t)$$

$$0 \leq t < 2\pi$$

parametriza uma
circunferência de raio 1
centrada em $(0, 0)$

Exemplo 7 – Solução

Sabemos que

$$x = \cos(t)$$

$$y = \sin(t)$$

$$0 \leq t < 2\pi$$

parametriza uma
circunferência de raio 1
centrada em $(0, 0)$

Para que o raio seja 2
multiplicamos as
funções por 2

$$x = 2 \cos(t)$$

$$y = 2 \sin(t)$$

$$0 \leq t < 2\pi$$

Exemplo 7 – Solução

Sabemos que

$$x = \cos(t)$$

$$y = \sin(t)$$

$$0 \leq t < 2\pi$$

parametriza uma
circunferência de raio 1
centrada em $(0, 0)$

Para que o raio seja 2
multiplicamos as
funções por 2

$$x = 2 \cos(t)$$

$$y = 2 \sin(t)$$

$$0 \leq t < 2\pi$$

Para mover o centro
para $(3, 4)$ somamos
esses valores

$$x = 2 \cos(t) + 3$$

$$y = 2 \sin(t) + 4$$

$$0 \leq t < 2\pi$$

Exemplo 8

Encontre uma parametrização para o círculo definido pela equação

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

Exemplo 8 – Solução

Círculo de raio 2 centrado no ponto $(3, -1)$

Parametrização do círculo unitário centrado na origem

$$x = \cos(\theta)$$

$$y = \sin(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Exemplo 8 – Solução

Parametrização do círculo de raio 2 centrado na origem

$$x = 2 \cos(\theta)$$

$$y = 2 \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Exemplo 8 – Solução

Parametrização do círculo de raio 2 centrado no ponto $(3, -1)$

$$x = 2 \cos(\theta) + 3$$

$$y = 2 \sin(\theta) - 1$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Exemplo 9

Encontre uma parametrização para o movimento de uma partícula que começa no ponto $(-2, 0)$ e traça a metade superior do círculo $x^2 + y^2 = 4$

Exemplo 9 – Solução

Metade superior do círculo de raio 2 centrado na origem

Parametrização do círculo unitário centrado na origem

$$x = \cos(\theta)$$

$$y = \sin(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Exemplo 9 – Solução

Parametrização do círculo de raio 2 centrado na origem

$$x = 2 \cos(\theta)$$

$$y = 2 \sin(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Exemplo 9 – Solução

Parametrização da metade superior

$$x = 2 \cos(\theta)$$

$$y = 2 \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\theta \in [0, \pi]$$

Exemplo 9 – Solução

Essa parametrização começa em $(2, 0)$ e termina em $(-2, 0)$

Queremos inverter o sentido em que percorremos a trajetória

$$x = 2 \cos(\pi - \theta) = -2 \cos(\theta)$$

$$y = 2 \sin(\pi - \theta) = 2 \sin(\theta)$$

$$\theta \in [0, \pi)$$

Conteúdo

Introdução

Curvas Paramétricas

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 11.1

1. Estudar todo o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 3, 5, 11, 19, 21, 23, 31

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações