

Funções de Várias Variáveis

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/pages/cfvv1>

Conteúdo

Funções

Funções de Várias Variáveis

Exemplos

Lista Mínima

$$f: A \rightarrow B$$

Funções

$$f: A \rightarrow B$$

► A domínio

Funções

$$f: A \rightarrow B$$

- ▶ A domínio
- ▶ B contradomínio

Funções

$$f: A \rightarrow B$$

- ▶ A domínio
- ▶ B contradomínio
- ▶ f relação que associa elementos do domínio a elementos do contradomínio

Funções

$$f: A \rightarrow B$$

- ▶ A domínio
- ▶ B contradomínio
- ▶ f relação que associa elementos do domínio a elementos do contradomínio
- ▶ Cada elemento do domínio deve estar associado a um único elemento do contradomínio

$$f: A \rightarrow B$$

- ▶ A domínio
- ▶ B contradomínio
- ▶ f relação que associa elementos do domínio a elementos do contradomínio
- ▶ Cada elemento do domínio deve estar associado a um único elemento do contradomínio
- ▶ A imagem é um subconjunto de B composto dos elementos que são imagem de algum elemento de A

- ▶ Precisa ser dado a priori

Domínio

- ▶ Precisa ser dado a priori
- ▶ Geralmente é determinado pela aplicação

Domínio

- ▶ Precisa ser dado a priori
- ▶ Geralmente é determinado pela aplicação
- ▶ Se nada for dito, assumimos o domínio “natural”, ie, todos os valores onde podemos efetuar as contas

- ▶ Subconjunto do contradomínio

Imagem

- ▶ Subconjunto do contradomínio
- ▶ O contradomínio é definido a priori

Imagem

- ▶ Subconjunto do contradomínio
- ▶ O contradomínio é definido a priori
- ▶ Pode ser difícil identificar a imagem de uma função

Imagem

- ▶ Subconjunto do contradomínio
- ▶ O contradomínio é definido a priori
- ▶ Pode ser difícil identificar a imagem de uma função
- ▶ Dada uma função $f: D \rightarrow C$
 y pertence a imagem de f , se existe $x \in D$ tal que

$$y = f(x)$$

Nomenclatura – Curiosidade

Função real

$$f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Nomenclatura – Curiosidade

Função real

$$f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Função de várias variáveis

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Nomenclatura – Curiosidade

Função real

$$f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Função de várias variáveis

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Função vetorial ou paramétrica

$$f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Nomenclatura – Curiosidade

Função real

$$f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Função de várias variáveis

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Função vetorial ou paramétrica

$$f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Campo vetorial

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Conteúdo

Funções

Funções de Várias Variáveis

Exemplos

Lista Mínima

Funções de Várias Variáveis

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Funções de Várias Variáveis

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = x + y$$

Funções de Várias Variáveis

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = x + y$$

$$f(\vec{r}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n r_k^2}$$

Funções de Várias Variáveis

Suponha que D seja um conjunto de n -uplas de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Funções de Várias Variáveis

Suponha que D seja um conjunto de n -uplas de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Uma **função** a valores reais f em D é uma regra que associa **um único número real**

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a cada elemento em D

Funções de Várias Variáveis

Suponha que D seja um conjunto de n -uplas de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Uma **função** a valores reais f em D é uma regra que associa **um único número real**

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a cada elemento em D

O conjunto D é o **domínio** da função

Funções de Várias Variáveis

Suponha que D seja um conjunto de n -uplas de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Uma **função** a valores reais f em D é uma regra que associa **um único número real**

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a cada elemento em D

O conjunto D é o **domínio** da função

O conjunto de valores de w assumidos por f é a **imagem** da função

Funções de Várias Variáveis

Suponha que D seja um conjunto de n -uplas de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Uma **função** a valores reais f em D é uma regra que associa **um único número real**

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a cada elemento em D

O conjunto D é o **domínio** da função

O conjunto de valores de w assumidos por f é a **imagem** da função

O símbolo w é a variável **dependente** de f , e dizemos que f é função de n variáveis **independentes** x_1 a x_n

Funções de Várias Variáveis

Suponha que D seja um conjunto de n -uplas de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Uma **função** a valores reais f em D é uma regra que associa **um único número real**

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a cada elemento em D

O conjunto D é o **domínio** da função

O conjunto de valores de w assumidos por f é a **imagem** da função

O símbolo w é a variável **dependente** de f , e dizemos que f é função de n variáveis **independentes** x_1 a x_n

Também chamamos os x_j de variáveis de **entrada** da função e denominamos w a variável de **saída** da função

Domínio e Imagem

Determinamos o **domínio** eliminando pontos que levam a divisões por zero ou valores complexos.

Domínio e Imagem

Determinamos o **domínio** eliminando pontos que levam a divisões por zero ou valores complexos.

A **imagem** consiste on conjunto de valores de saída para a variável dependente

Conteúdo

Funções

Funções de Várias Variáveis

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 1

Descreva o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$

1. Qual a condição que os pontos do domínio deve satisfazer?
2. Que região é essa? Represente-a graficamente.

Exemplo 1 – Solução

Condição que deve ser satisfeita para um ponto estar no domínio

Exemplo 1 – Solução

Condição que deve ser satisfeita para um ponto estar no domínio

$$y - x^2 \geq 0$$

Exemplo 1 – Solução

Condição que deve ser satisfeita para um ponto estar no domínio

$$y - x^2 \geq 0$$

$$y \geq x^2$$

Exemplo 1 – Solução

Condição que deve ser satisfeita para um ponto estar no domínio

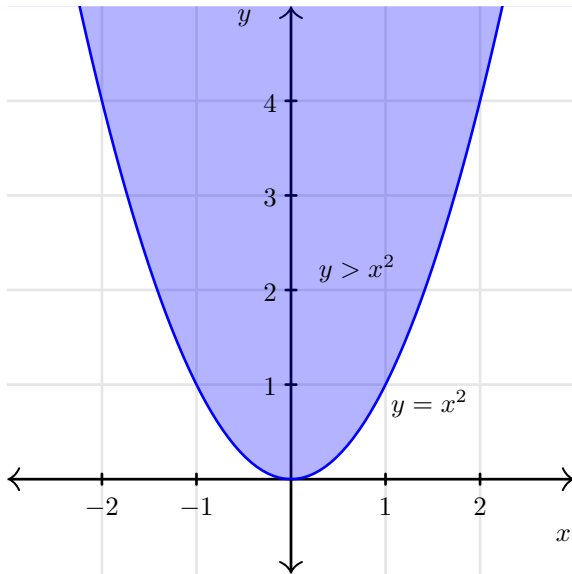
$$y - x^2 \geq 0$$

$$y \geq x^2$$

Domínio

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$$

Exemplo 1 – Representação Gráfica



Exemplo 2

Encontre e esboce o domínio da função

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$$

Exemplo 2 – Solução

Condição

Exemplo 2 – Solução

Condição

$$x^2 + y^2 - 4 > 0$$

Exemplo 2 – Solução

Condição

$$x^2 + y^2 - 4 > 0$$

$$x^2 + y^2 > 4$$

Exemplo 2 – Solução

Condição

$$x^2 + y^2 - 4 > 0$$

$$x^2 + y^2 > 4$$

Pontos exteriores ao círculo centrado na origem e raio 2

Exemplo 2 – Solução

Condição

$$x^2 + y^2 - 4 > 0$$

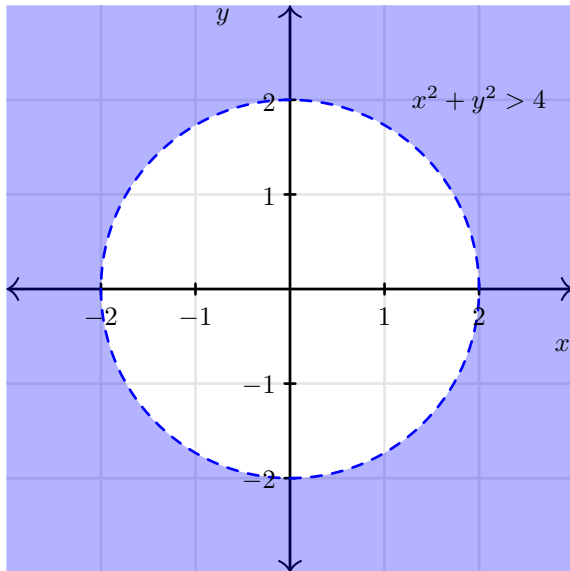
$$x^2 + y^2 > 4$$

Pontos exteriores ao círculo centrado na origem e raio 2

Domínio

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$$

Exemplo 2 – Representação Gráfica



Exemplo 3

Encontre e esboce o domínio da função $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\ln(y - 1)}$

Exemplo 3 – Solução

Condições para avaliar a função $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\ln(y - 1)}$

Exemplo 3 – Solução

Condições para avaliar a função $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\ln(y - 1)}$

1. $x^2 - 4 \geq 0$

Exemplo 3 – Solução

Condições para avaliar a função $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\ln(y - 1)}$

1. $x^2 - 4 \geq 0$
2. $\ln(y - 1) \neq 0$

Exemplo 3 – Solução

Condições para avaliar a função $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\ln(y - 1)}$

1. $x^2 - 4 \geq 0$
2. $\ln(y - 1) \neq 0$
3. $y - 1 > 0$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Condição 2

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Condição 2

$$\ln(y - 1) \neq 0$$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Condição 2

$$\ln(y - 1) \neq 0$$

$$y - 1 \neq 1$$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Condição 2

$$\ln(y - 1) \neq 0$$

$$y - 1 \neq 1$$

$$y \neq 2$$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Condição 2

$$\ln(y - 1) \neq 0$$

$$y - 1 \neq 1$$

$$y \neq 2$$

Condição 3

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Condição 2

$$\ln(y - 1) \neq 0$$

$$y - 1 \neq 1$$

$$y \neq 2$$

Condição 3

$$y - 1 > 0$$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Condição 2

$$\ln(y - 1) \neq 0$$

$$y - 1 \neq 1$$

$$y \neq 2$$

Condição 3

$$y - 1 > 0$$

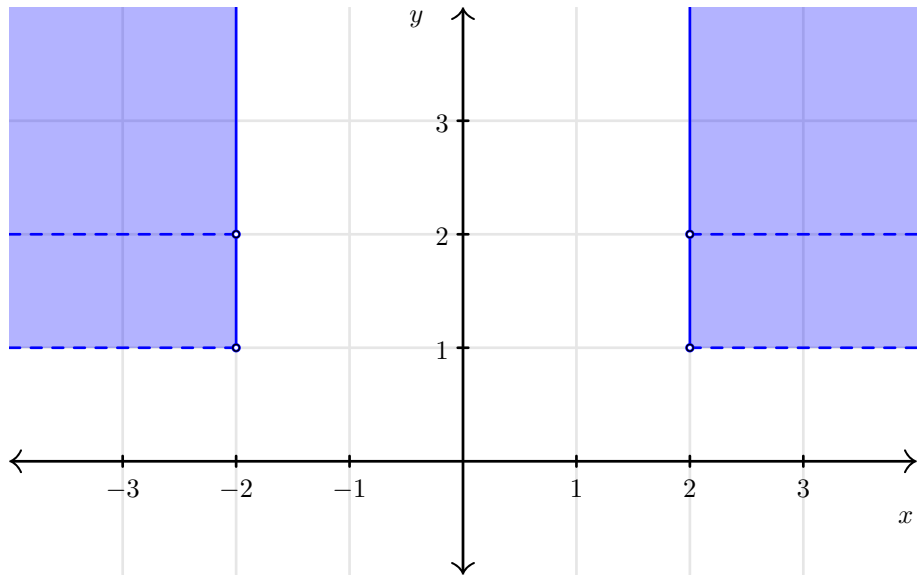
$$y > 1$$

Exemplo 3 – Solução

Domínio

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geq 2 \text{ e } y > 1 \text{ e } y \neq 2\}$$

Exemplo 3 – Representação Gráfica



Conteúdo

Funções

Funções de Várias Variáveis

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 14.1

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 1-2, 5-9

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações