

Regiões do Plano ou do Espaço

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/pages/cfvv1>

Conteúdo

Intervalos

Regiões

Exemplos

Lista Mínima

Intervalos

Subconjuntos continuos de $\mathbb{R}$

Intervalos

Subconjuntos contínuos de $\mathbb{R}$

Intervalo fechado

$$[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

Intervalos

Subconjuntos contínuos de $\mathbb{R}$

Intervalo fechado

$$[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

Intervalo aberto

$$(-2, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$$

Intervalos

Subconjuntos contínuos de $\mathbb{R}$

Intervalo fechado

$$[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

Intervalo aberto

$$(-2, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$$

Aberto a esquerda e fechado a direita

$$(1, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$$

Conteúdo

Intervalos

Regiões

Exemplos

Lista Mínima

Ponto Interior

Um ponto (a, b) em uma região
(conjunto) R no plano xy é um **ponto
interior** de R

Ponto Interior

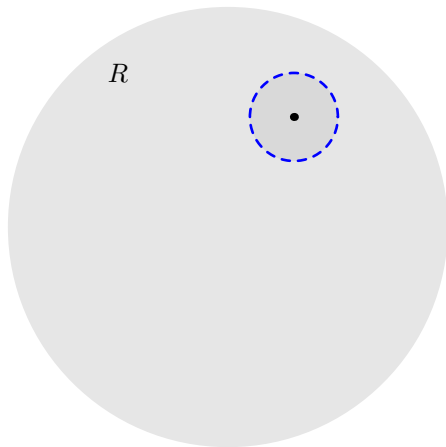
Um ponto (a, b) em uma região
(conjunto) R no plano xy é um **ponto
interior** de R

se é o centro de um disco de raio positivo
que está inteiramente em R

Ponto Interior

Um ponto (a, b) em uma região (conjunto) R no plano xy é um **ponto interior** de R

se é o centro de um disco de raio positivo que está inteiramente em R



Ponto de Fronteira

Um ponto (a, b) é um **ponto de fronteira**
de R

Ponto de Fronteira

Um ponto (a, b) é um **ponto de fronteira** de R

se todo disco centrado em (a, b) contém
ao mesmo tempo pontos que estão em R
e fora de R

Ponto de Fronteira

Um ponto (a, b) é um **ponto de fronteira** de R

se todo disco centrado em (a, b) contém ao mesmo tempo pontos que estão em R e fora de R

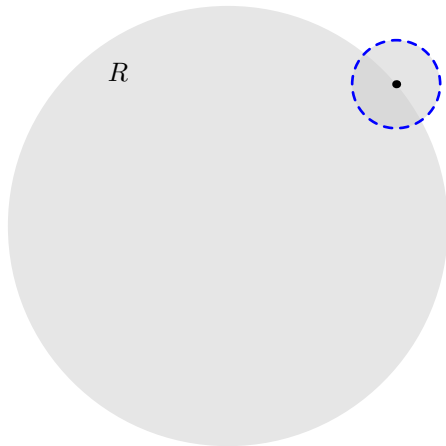
O ponto de fronteira não precisa pertencer a R

Ponto de Fronteira

Um ponto (a, b) é um **ponto de fronteira** de R

se todo disco centrado em (a, b) contém ao mesmo tempo pontos que estão em R e fora de R

O ponto de fronteira não precisa pertencer a R

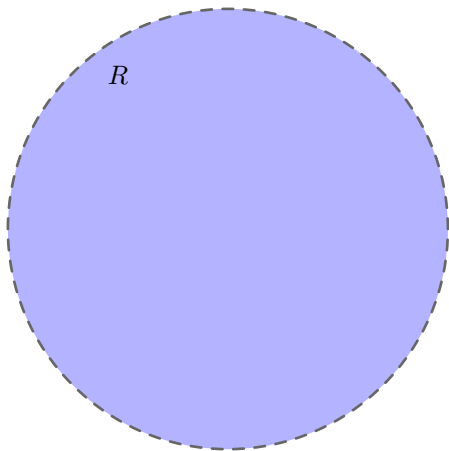


Interior de uma Região

O conjunto de todos os pontos interiores da região formam o **interior** da região

Interior de uma Região

O conjunto de todos os pontos interiores da região formam o **interior** da região

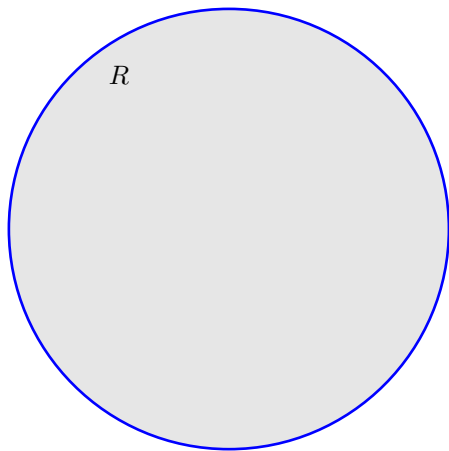


Fronteira de uma Região

Os pontos de fronteira da região formam
sua **fronteira**

Fronteira de uma Região

Os pontos de fronteira da região formam
sua **fronteira**

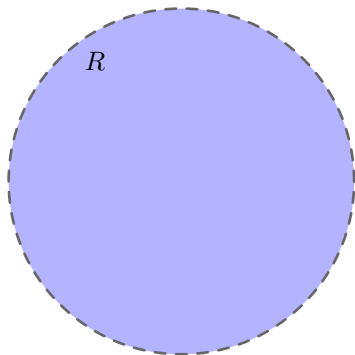


Regiões Abertas e Fechadas

Uma região é **aberta** se consiste apenas de pontos interiores

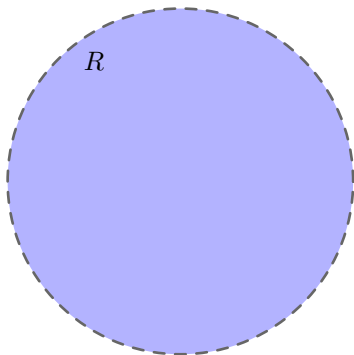
Regiões Abertas e Fechadas

Uma região é **aberta** se consiste apenas de pontos interiores



Regiões Abertas e Fechadas

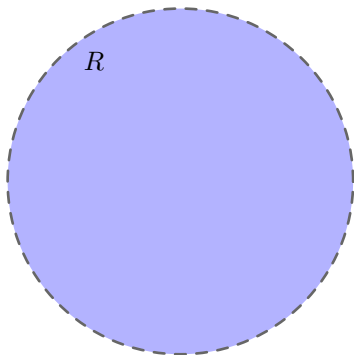
Uma região é **aberta** se consiste apenas de pontos interiores



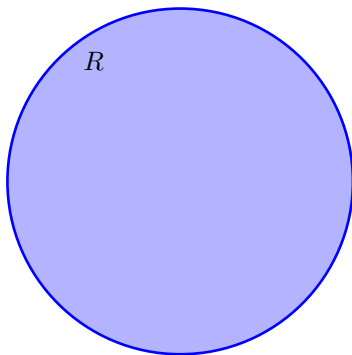
Uma região é **fechada** se contém todos os seus pontos de fronteira

Regiões Abertas e Fechadas

Uma região é **aberta** se consiste apenas de pontos interiores



Uma região é **fechada** se contém todos os seus pontos de fronteira

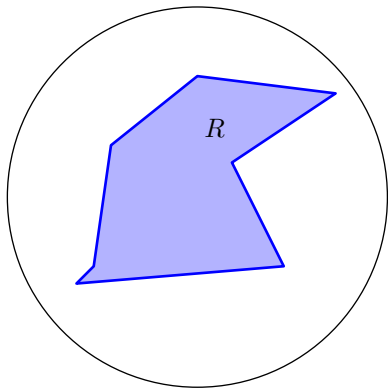


Regiões Limitadas

Uma região do plano é limitada se está dentro de um disco de raio fixo

Regiões Limitadas

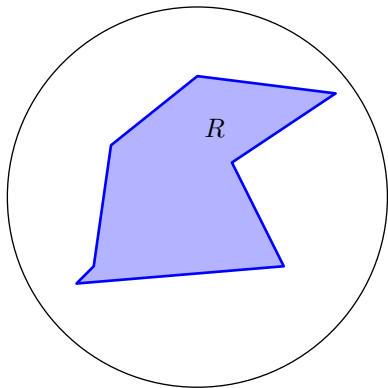
Uma região do plano é limitada se está dentro de um disco de raio fixo



Regiões Limitadas

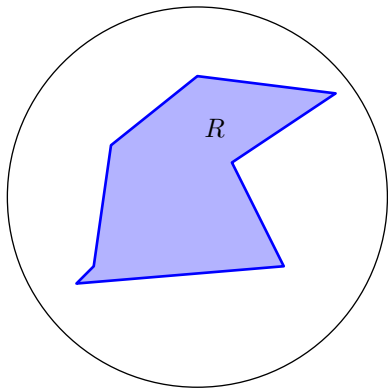
Uma região do plano é limitada se está dentro de um disco de raio fixo

Caso contrário ela é ilimitada

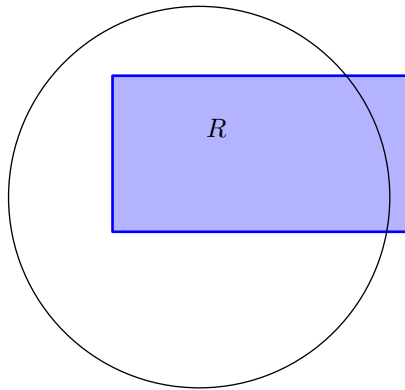


Regiões Limitadas

Uma região do plano é limitada se está dentro de um disco de raio fixo



Caso contrário ela é ilimitada



Conteúdo

Intervalos

Regiões

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 1

Descreva o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$

1. Qual a condição que os pontos do domínio deve satisfazer?
2. Que região é essa? Represente-a graficamente.
3. Qual o interior da região?
4. Qual a fronteira da região?
5. A região é aberta ou fechada?
6. A região é limitada?

Exemplo 1 – Solução

Condição que deve ser satisfeita para um ponto estar no domínio

Exemplo 1 – Solução

Condição que deve ser satisfeita para um ponto estar no domínio

$$y - x^2 \geq 0$$

Exemplo 1 – Solução

Condição que deve ser satisfeita para um ponto estar no domínio

$$y - x^2 \geq 0$$

$$y \geq x^2$$

Exemplo 1 – Solução

Condição que deve ser satisfeita para um ponto estar no domínio

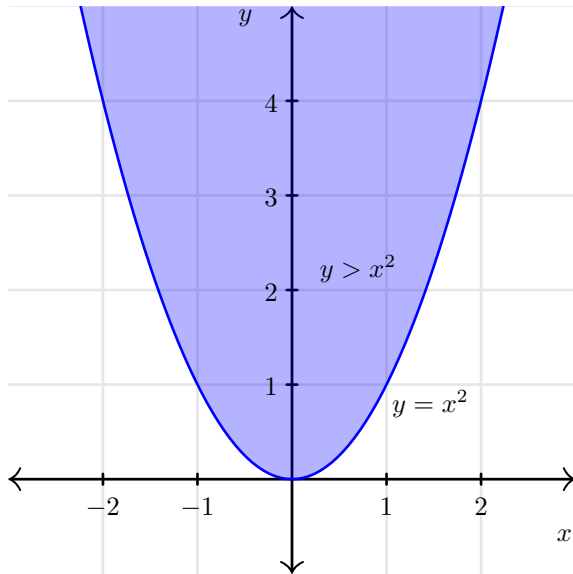
$$y - x^2 \geq 0$$

$$y \geq x^2$$

Domínio

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$$

Exemplo 1 – Representação Gráfica



Exemplo 1 – Solução

1. Interior da região

Exemplo 1 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$$

Exemplo 1 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$$

2. Fronteira da região

Exemplo 1 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

Exemplo 1 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

3. A região é aberta ou fechada?

Exemplo 1 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

3. A região é aberta ou fechada?

Fechada,

Exemplo 1 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

3. A região é aberta ou fechada?

Fechada, pois $y = x^2$ pertence ao domínio

Exemplo 1 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

3. A região é aberta ou fechada?

Fechada, pois $y = x^2$ pertence ao domínio

4. A região é limitada?

Exemplo 1 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

3. A região é aberta ou fechada?

Fechada, pois $y = x^2$ pertence ao domínio

4. A região é limitada?

Ilimitada,

Exemplo 1 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

3. A região é aberta ou fechada?

Fechada, pois $y = x^2$ pertence ao domínio

4. A região é limitada?

Ilimitada, pois dado qualquer disco sempre teremos um ponto fora dele

Exemplo 2

Descreva o domínio da função $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

1. Qual a condição que os pontos do domínio deve satisfazer?
2. Que região é essa? Represente-a graficamente.
3. Qual o interior da região?
4. Qual a fronteira da região?
5. A região é aberta ou fechada?
6. A região é limitada?

Exemplo 2 – Solução

Condição

Exemplo 2 – Solução

Condição

$$x^2 + y^2 - 4 > 0$$

Exemplo 2 – Solução

Condição

$$x^2 + y^2 - 4 > 0$$

$$x^2 + y^2 > 4$$

Exemplo 2 – Solução

Condição

$$x^2 + y^2 - 4 > 0$$

$$x^2 + y^2 > 4$$

Pontos exteriores ao círculo centrado na origem e raio 2

Exemplo 2 – Solução

Condição

$$x^2 + y^2 - 4 > 0$$

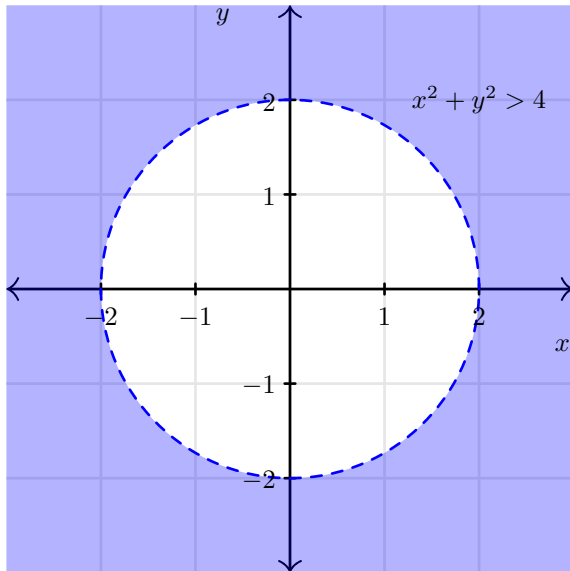
$$x^2 + y^2 > 4$$

Pontos exteriores ao círculo centrado na origem e raio 2

Domínio

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$$

Exemplo 2 – Representação Gráfica



Exemplo 2 – Solução

1. Interior da região

Exemplo 2 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$$

Exemplo 2 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$$

2. Fronteira da região

Exemplo 2 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

Exemplo 2 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

3. A região é aberta ou fechada?

Exemplo 2 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

3. A região é aberta ou fechada?

Aberta,

Exemplo 2 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

3. A região é aberta ou fechada?

Aberta, todos os pontos são pontos interiores

Exemplo 2 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

3. A região é aberta ou fechada?

Aberta, todos os pontos são pontos interiores

4. A região é limitada?

Exemplo 2 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

3. A região é aberta ou fechada?

Aberta, todos os pontos são pontos interiores

4. A região é limitada?

Ilimitada,

Exemplo 2 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

3. A região é aberta ou fechada?

Aberta, todos os pontos são pontos interiores

4. A região é limitada?

Ilimitada, pois dado qualquer disco sempre teremos um ponto fora dele

Exemplo 3

Descreva o domínio da função $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\ln(y - 1)}$

1. Qual a condição que os pontos do domínio deve satisfazer?
2. Que região é essa? Represente-a graficamente.
3. Qual o interior da região?
4. Qual a fronteira da região?
5. A região é aberta ou fechada?
6. A região é limitada?

Exemplo 3 – Solução

Condições para avaliar a função $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\ln(y - 1)}$

Exemplo 3 – Solução

Condições para avaliar a função $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\ln(y - 1)}$

1. $x^2 - 4 \geq 0$

Exemplo 3 – Solução

Condições para avaliar a função $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\ln(y - 1)}$

1. $x^2 - 4 \geq 0$
2. $\ln(y - 1) \neq 0$

Exemplo 3 – Solução

Condições para avaliar a função $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\ln(y - 1)}$

1. $x^2 - 4 \geq 0$
2. $\ln(y - 1) \neq 0$
3. $y - 1 > 0$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Condição 2

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Condição 2

$$\ln(y - 1) \neq 0$$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Condição 2

$$\ln(y - 1) \neq 0$$

$$y - 1 \neq 1$$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Condição 2

$$\ln(y - 1) \neq 0$$

$$y - 1 \neq 1$$

$$y \neq 2$$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Condição 2

$$\ln(y - 1) \neq 0$$

$$y - 1 \neq 1$$

$$y \neq 2$$

Condição 3

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Condição 2

$$\ln(y - 1) \neq 0$$

$$y - 1 \neq 1$$

$$y \neq 2$$

Condição 3

$$y - 1 > 0$$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Condição 2

$$\ln(y - 1) \neq 0$$

$$y - 1 \neq 1$$

$$y \neq 2$$

Condição 3

$$y - 1 > 0$$

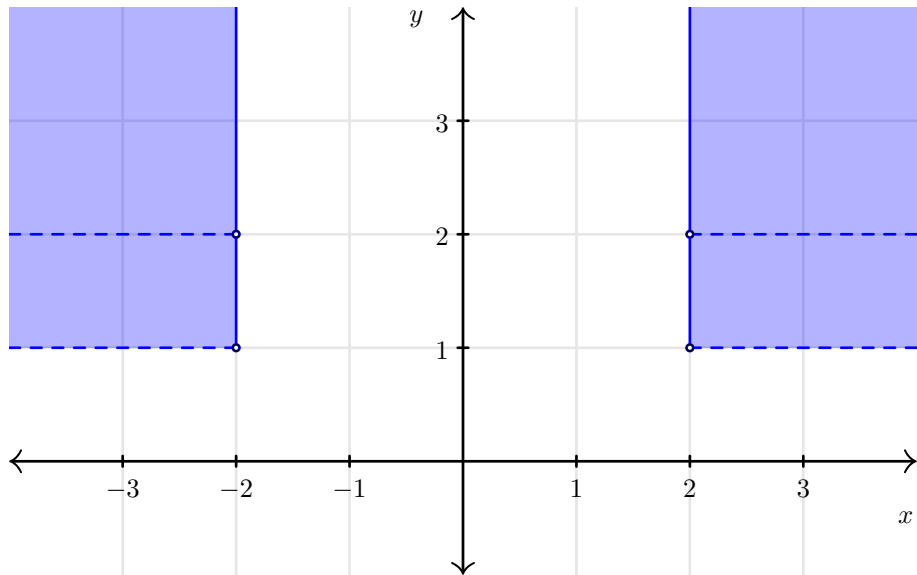
$$y > 1$$

Exemplo 3 – Solução

Domínio

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geq 2 \text{ e } y > 1 \text{ e } y \neq 2\}$$

Exemplo 3 – Representação Gráfica



Exemplo 3 – Solução

1. Interior da região

Exemplo 3 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > 2 \text{ e } y > 1 \text{ e } y \neq 2\}$$

Exemplo 3 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > 2 \text{ e } y > 1 \text{ e } y \neq 2\}$$

2. Fronteira da região

Exemplo 3 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > 2 \text{ e } y > 1 \text{ e } y \neq 2\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 \text{ e } |x| \geq 2, \text{ ou } \right. \\ \left. y = 2 \text{ e } |x| \geq 2, \text{ ou } x = \pm 2 \text{ e } y \geq 1 \right\}$$

Exemplo 3 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > 2 \text{ e } y > 1 \text{ e } y \neq 2\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 \text{ e } |x| \geq 2, \text{ ou } \right. \\ \left. y = 2 \text{ e } |x| \geq 2, \text{ ou } x = \pm 2 \text{ e } y \geq 1 \right\}$$

3. A região é aberta ou fechada?

Exemplo 3 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > 2 \text{ e } y > 1 \text{ e } y \neq 2\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 \text{ e } |x| \geq 2, \text{ ou } \right. \\ \left. y = 2 \text{ e } |x| \geq 2, \text{ ou } x = \pm 2 \text{ e } y \geq 1 \right\}$$

3. A região é aberta ou fechada?

Nem aberta nem fechada

Exemplo 3 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > 2 \text{ e } y > 1 \text{ e } y \neq 2\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 \text{ e } |x| \geq 2, \text{ ou } \right. \\ \left. y = 2 \text{ e } |x| \geq 2, \text{ ou } x = \pm 2 \text{ e } y \geq 1 \right\}$$

3. A região é aberta ou fechada?

Nem aberta nem fechada

4. A região é limitada?

Exemplo 3 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > 2 \text{ e } y > 1 \text{ e } y \neq 2\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 \text{ e } |x| \geq 2, \text{ ou } \right. \\ \left. y = 2 \text{ e } |x| \geq 2, \text{ ou } x = \pm 2 \text{ e } y \geq 1 \right\}$$

3. A região é aberta ou fechada?

Nem aberta nem fechada

4. A região é limitada?

Ilimitada,

Exemplo 3 – Solução

1. Interior da região

$$\text{Interior} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > 2 \text{ e } y > 1 \text{ e } y \neq 2\}$$

2. Fronteira da região

$$\text{Fronteira} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 \text{ e } |x| \geq 2, \text{ ou } \right. \\ \left. y = 2 \text{ e } |x| \geq 2, \text{ ou } x = \pm 2 \text{ e } y \geq 1 \right\}$$

3. A região é aberta ou fechada?

Nem aberta nem fechada

4. A região é limitada?

Ilimitada, pois dado qualquer disco sempre teremos um ponto fora dele

Conteúdo

Intervalos

Regiões

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 14.1

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 1-2, 5-9

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações