

# Curvas de Nível

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/pages/cfvv1>

# Conteúdo

Curvas de Nível

Exemplos

Lista Mínima

# Curvas de Nível

Curva de nível: conjunto de pontos no plano  $xy$  onde

$$f(x, y) = c$$

para uma constante  $c$

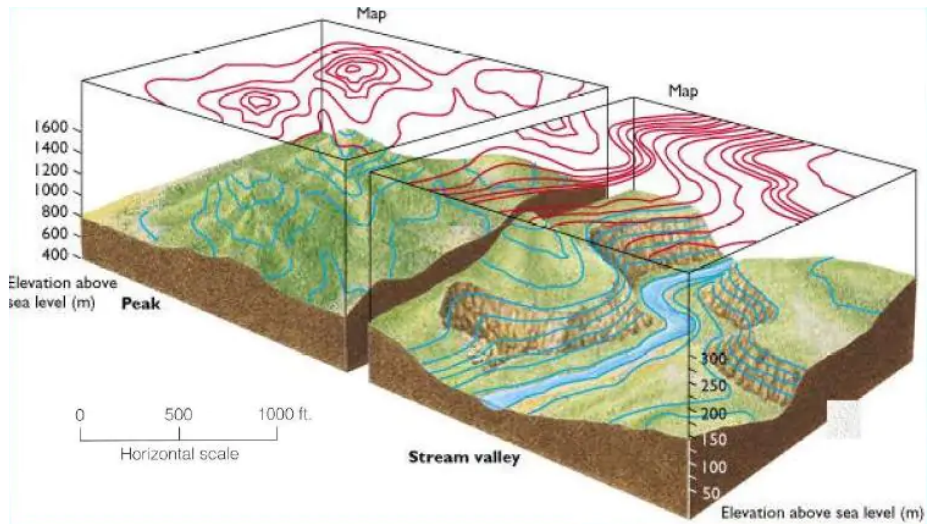
# Superfície de Nível

Superfície de nível: conjunto de pontos onde

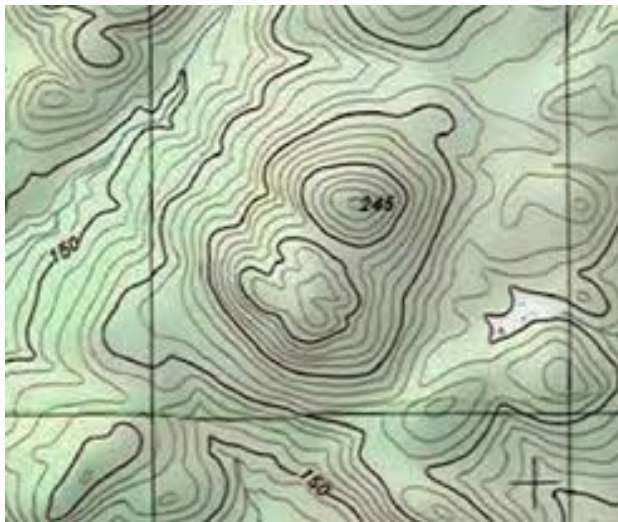
$$f(x, y, z) = c$$

para uma constante  $c$

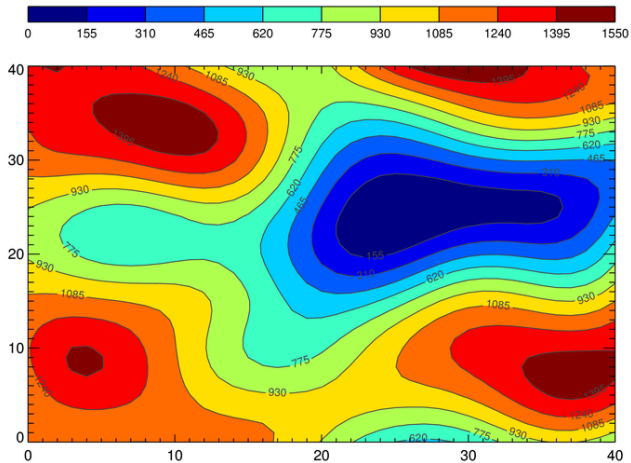
# Exemplo



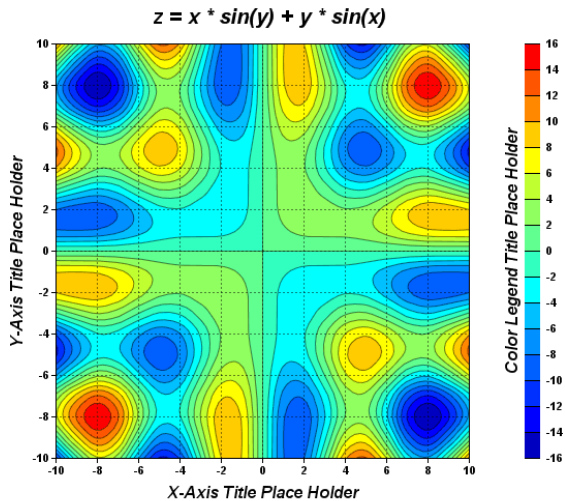
# Exemplo



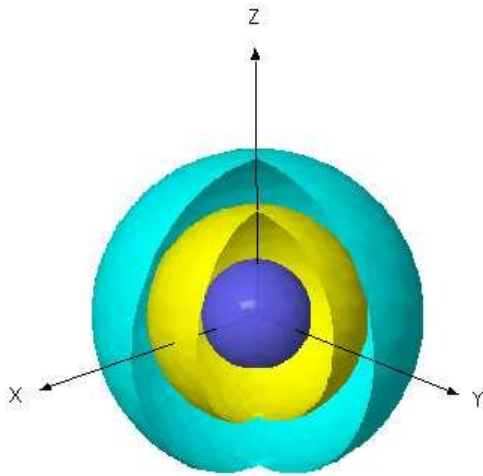
# Exemplo



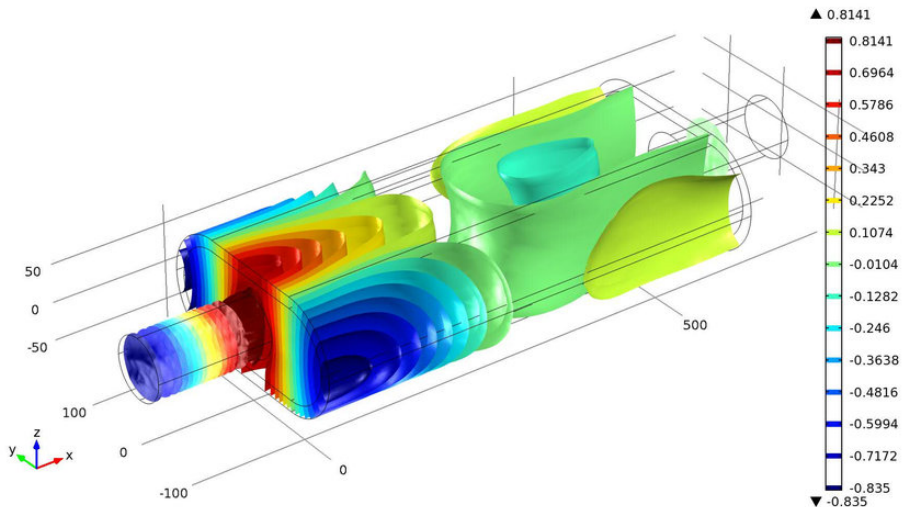
# Exemplo



# Exemplo

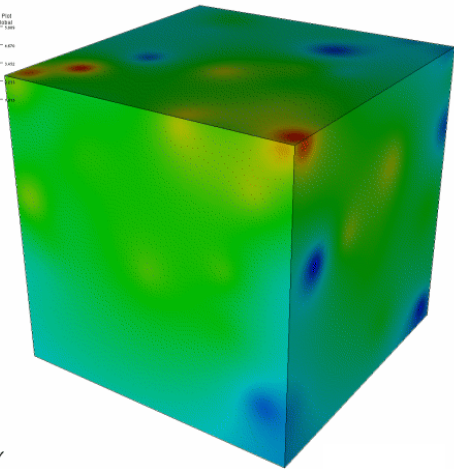
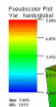


# Exemplo

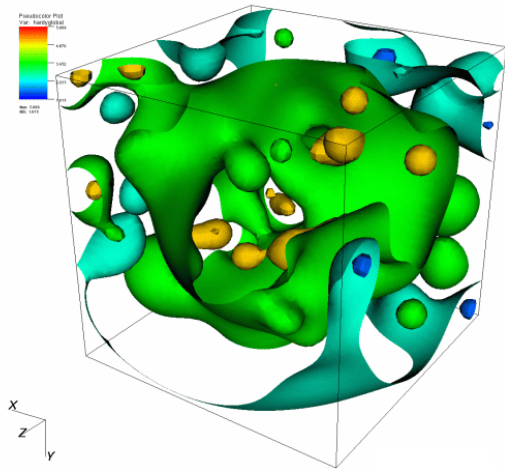
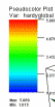


# Exemplo

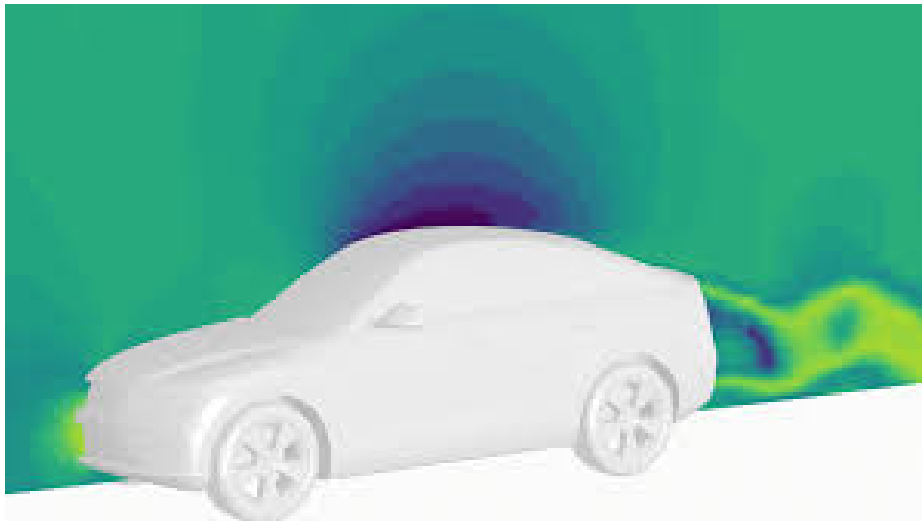
DB: noise.silo  
Cycle: 0



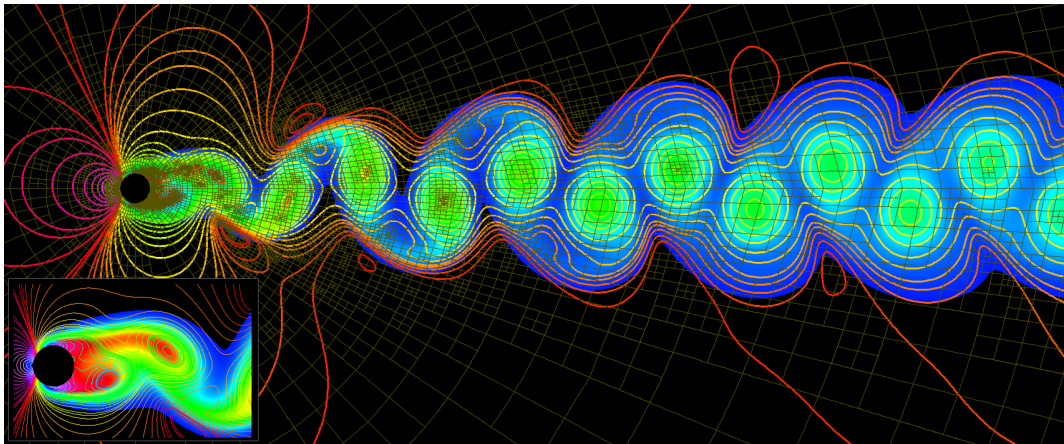
DB: noise.silo  
Cycle: 0



# Exemplo



# Exemplo



# Conteúdo

Curvas de Nível

**Exemplos**

Lista Mínima

# Exemplo 1

Descreva e esboce as curvas de nível da função  $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$

# Exemplo 1 – Solução

Para cada valor  $c \leq 100$

# Exemplo 1 – Solução

Para cada valor  $c \leq 100$

$$f(x, y) = c$$

# Exemplo 1 – Solução

Para cada valor  $c \leq 100$

$$f(x, y) = c$$

$$100 - x^2 - y^2 = c$$

# Exemplo 1 – Solução

Para cada valor  $c \leq 100$

$$f(x, y) = c$$

$$100 - x^2 - y^2 = c$$

$$-x^2 - y^2 = c - 100$$

# Exemplo 1 – Solução

Para cada valor  $c \leq 100$

$$f(x, y) = c$$

$$100 - x^2 - y^2 = c$$

$$-x^2 - y^2 = c - 100$$

$$x^2 + y^2 = 100 - c$$

## Exemplo 1 – Solução

Para cada valor  $c \leq 100$

$$f(x, y) = c$$

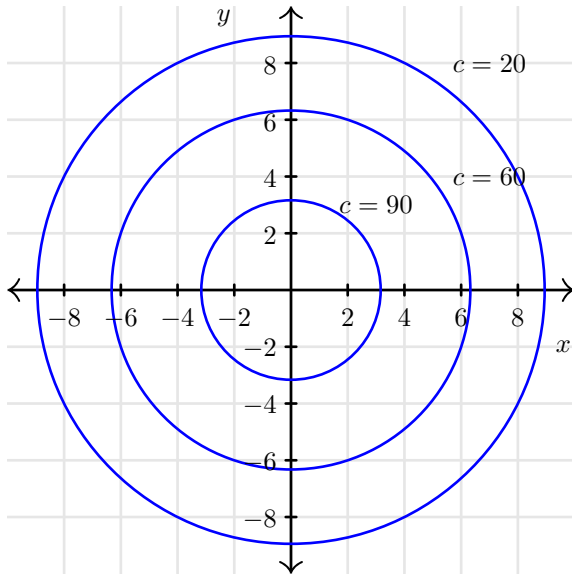
$$100 - x^2 - y^2 = c$$

$$-x^2 - y^2 = c - 100$$

$$x^2 + y^2 = 100 - c$$

As curvas de nível são circunferências centradas nas origem de raio  $\sqrt{100 - c}$

# Exemplo 1 – Curvas de Nível



## Exemplo 2

Descreva as superfícies de nível da função  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

## Exemplo 2 – Solução

Para cada valor  $c \geq 0$

## Exemplo 2 – Solução

Para cada valor  $c \geq 0$

$$f(x, y, z) = c$$

## Exemplo 2 – Solução

Para cada valor  $c \geq 0$

$$f(x, y, z) = c$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c$$

## Exemplo 2 – Solução

Para cada valor  $c \geq 0$

$$f(x, y, z) = c$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2$$

## Exemplo 2 – Solução

Para cada valor  $c \geq 0$

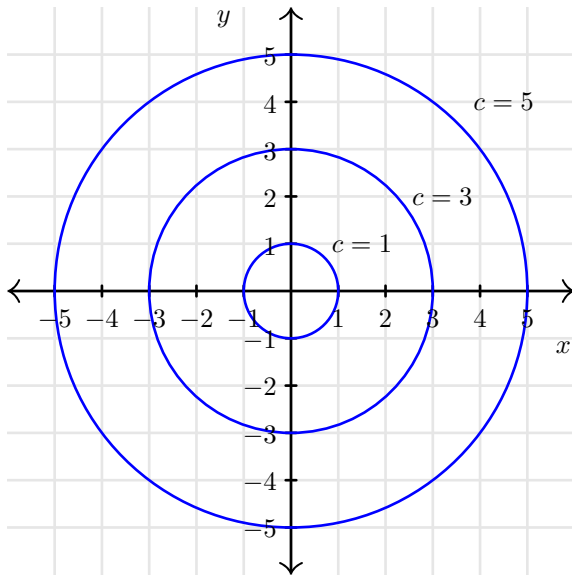
$$f(x, y, z) = c$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2$$

As superfícies de nível são esferas centradas na origem de raio  $c$

## Exemplo 2 – Curvas de Nível



## Exemplo 3

Descreva e esboce as curvas de nível da função  $f(x, y) = xy$

## Exemplo 3 – Solução

Para cada valor  $c \neq 0$

## Exemplo 3 – Solução

Para cada valor  $c \neq 0$

$$f(x, y) = c$$

## Exemplo 3 – Solução

Para cada valor  $c \neq 0$

$$f(x, y) = c$$

$$xy = c$$

## Exemplo 3 – Solução

Para cada valor  $c \neq 0$

$$f(x, y) = c$$

$$xy = c$$

$$y = \frac{c}{x}$$

## Exemplo 3 – Solução

Para cada valor  $c \neq 0$

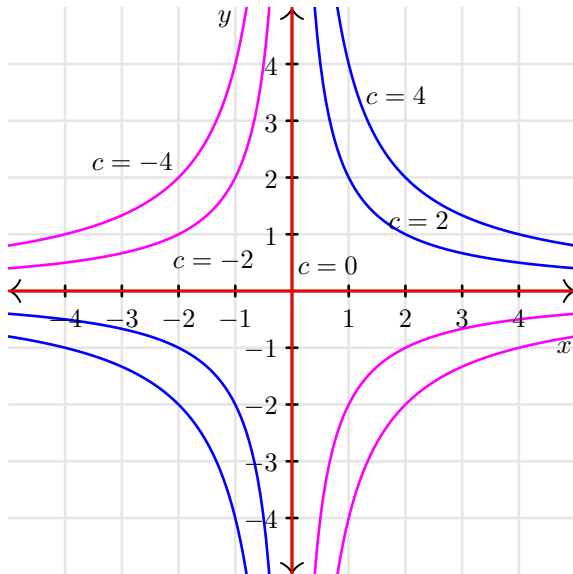
$$f(x, y) = c$$

$$xy = c$$

$$y = \frac{c}{x}$$

Para  $c = 0$ , ou  $x = 0$  ou  $y = 0$

## Exemplo 3 – Curvas de Nível



## Exemplo 4

Descreva e esboce as curvas de nível da função  $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$

## Exemplo 4 – Solução

Domínio de  $f$

## Exemplo 4 – Solução

Domínio de  $f$

$$9 - x^2 - y^2 > 0$$

## Exemplo 4 – Solução

Domínio de  $f$

$$9 - x^2 - y^2 > 0$$

$$9 > x^2 + y^2$$

## Exemplo 4 – Solução

Domínio de  $f$

$$9 - x^2 - y^2 > 0$$

$$9 > x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 < 3^2$$

## Exemplo 4 – Solução

Domínio de  $f$

$$9 - x^2 - y^2 > 0$$

$$9 > x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 < 3^2$$

Disco aberto centrado na origem de raio 3

## Exemplo 4 – Solução

Domínio de  $f$

$$9 - x^2 - y^2 > 0$$

$$9 > x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 < 3^2$$

Disco aberto centrado na origem de raio 3

Imagem:

## Exemplo 4 – Solução

Domínio de  $f$

$$9 - x^2 - y^2 > 0$$

$$9 > x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 < 3^2$$

Disco aberto centrado na origem de raio 3

Imagem: a função assume valores no intervalo  $(-\infty, \ln(9)]$

## Exemplo 4 – Solução

Para cada valor  $c \leq \ln(9)$

## Exemplo 4 – Solução

Para cada valor  $c \leq \ln(9)$

$$f(x, y) = c$$

## Exemplo 4 – Solução

Para cada valor  $c \leq \ln(9)$

$$f(x, y) = c$$

$$\ln(9 - x^2 - y^2) = c$$

## Exemplo 4 – Solução

Para cada valor  $c \leq \ln(9)$

$$f(x, y) = c$$

$$\ln(9 - x^2 - y^2) = c$$

$$9 - x^2 - y^2 = e^c$$

## Exemplo 4 – Solução

Para cada valor  $c \leq \ln(9)$

$$f(x, y) = c$$

$$\ln(9 - x^2 - y^2) = c$$

$$9 - x^2 - y^2 = e^c$$

$$-x^2 - y^2 = e^c - 9$$

## Exemplo 4 – Solução

Para cada valor  $c \leq \ln(9)$

$$f(x, y) = c$$

$$\ln(9 - x^2 - y^2) = c$$

$$9 - x^2 - y^2 = e^c$$

$$-x^2 - y^2 = e^c - 9$$

$$x^2 + y^2 = 9 - e^c$$

## Exemplo 4 – Solução

Para cada valor  $c \leq \ln(9)$

$$f(x, y) = c$$

$$\ln(9 - x^2 - y^2) = c$$

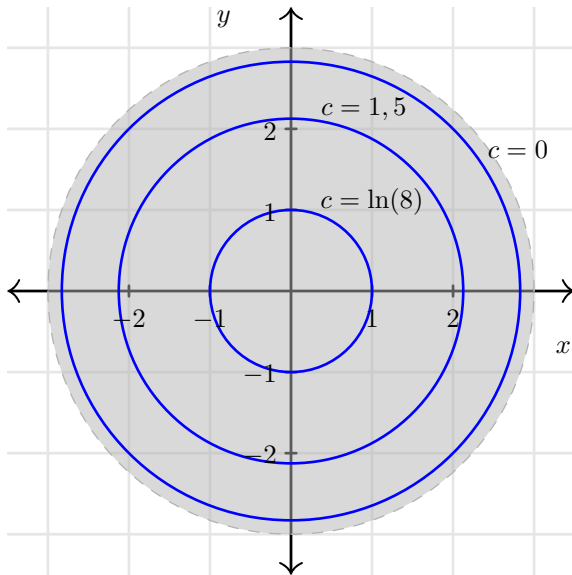
$$9 - x^2 - y^2 = e^c$$

$$-x^2 - y^2 = e^c - 9$$

$$x^2 + y^2 = 9 - e^c$$

As curvas de nível são circunferências centrada nas origem de raio  $\sqrt{9 - e^c}$

## Exemplo 4 – Curvas de Nível



## Exemplo 5

Encontre a equação e esboce a curva de nível da função

$$f(x, y) = \frac{2y - x}{x + y + 1}$$

que passa pelo ponto  $(-1, 1)$

## Exemplo 5 – Solução

$$c = f(-1, 1)$$

## Exemplo 5 – Solução

$$c = f(-1, 1)$$

$$c = \left. \frac{2y - x}{x + y + 1} \right|_{(-1,1)}$$

## Exemplo 5 – Solução

$$c = f(-1, 1)$$

$$c = \left. \frac{2y - x}{x + y + 1} \right|_{(-1,1)}$$

$$c = \frac{2 \times 1 - (-1)}{(-1) + 1 + 1}$$

## Exemplo 5 – Solução

$$c = f(-1, 1)$$

$$c = \left. \frac{2y - x}{x + y + 1} \right|_{(-1,1)}$$

$$c = \frac{2 \times 1 - (-1)}{(-1) + 1 + 1}$$

$$c = \frac{2 + 1}{1}$$

## Exemplo 5 – Solução

$$c = f(-1, 1)$$

$$c = \left. \frac{2y - x}{x + y + 1} \right|_{(-1,1)}$$

$$c = \frac{2 \times 1 - (-1)}{(-1) + 1 + 1}$$

$$c = \frac{2 + 1}{1}$$

$$c = 3$$

## Exemplo 5 – Solução

$$f(x, y) = 3$$

## Exemplo 5 – Solução

$$f(x, y) = 3$$

$$\frac{2y - x}{x + y + 1} = 3$$

## Exemplo 5 – Solução

$$f(x, y) = 3$$

$$\frac{2y - x}{x + y + 1} = 3$$

$$2y - x = 3(x + y + 1)$$

## Exemplo 5 – Solução

$$f(x, y) = 3$$

$$\frac{2y - x}{x + y + 1} = 3$$

$$2y - x = 3(x + y + 1)$$

$$2y - x = 3x + 3y + 3$$

## Exemplo 5 – Solução

$$f(x, y) = 3$$

$$\frac{2y - x}{x + y + 1} = 3$$

$$2y - x = 3(x + y + 1)$$

$$2y - x = 3x + 3y + 3$$

$$2y - 3y = 3x + x + 3$$

## Exemplo 5 – Solução

$$f(x, y) = 3$$

$$\frac{2y - x}{x + y + 1} = 3$$

$$2y - x = 3(x + y + 1)$$

$$2y - x = 3x + 3y + 3$$

$$2y - 3y = 3x + x + 3$$

$$-y = 4x + 3$$

## Exemplo 5 – Solução

$$f(x, y) = 3$$

$$\frac{2y - x}{x + y + 1} = 3$$

$$2y - x = 3(x + y + 1)$$

$$2y - x = 3x + 3y + 3$$

$$2y - 3y = 3x + x + 3$$

$$-y = 4x + 3$$

$$y = -4x - 3$$

## Exemplo 5 – Solução

$$f(x, y) = 3$$

$$\frac{2y - x}{x + y + 1} = 3$$

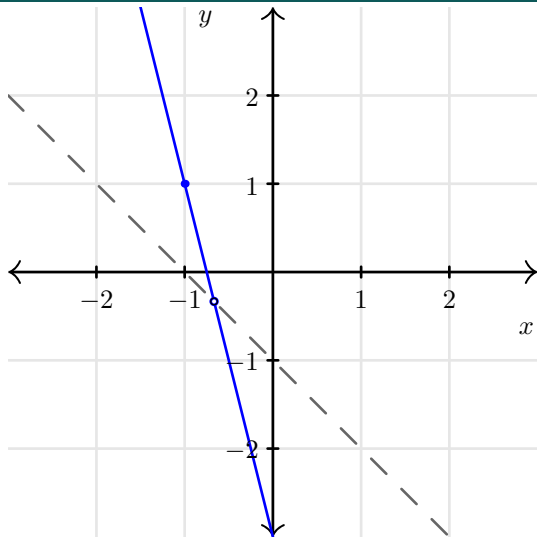
$$2y - x = 3(x + y + 1)$$

$$2y - x = 3x + 3y + 3$$

$$2y - 3y = 3x + x + 3$$

$$-y = 4x + 3$$

$$y = -4x - 3$$



## Exemplo 6

Encontre a equação e esboce a curva de nível da função

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - 1}$$

que passa pelo ponto  $(1, 0)$

## Exemplo 6 – Solução

Domínio

$$x^2 - 1 \geq 0$$

## Exemplo 6 – Solução

Domínio

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$x^2 \geq 1$$

## Exemplo 6 – Solução

Domínio

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$x^2 \geq 1$$

$$|x| \geq 1$$

## Exemplo 6 – Solução

Domínio

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$x^2 \geq 1$$

$$|x| \geq 1$$

$$x \leq -1 \quad \text{ou} \quad x \geq 1$$

## Exemplo 6 – Solução

Domínio

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$x^2 \geq 1$$

$$|x| \geq 1$$

$$x \leq -1 \quad \text{ou} \quad x \geq 1$$

$$c = f(1, 0)$$

## Exemplo 6 – Solução

Domínio

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$x^2 \geq 1$$

$$|x| \geq 1$$

$$x \leq -1 \quad \text{ou} \quad x \geq 1$$

$$c = f(1, 0)$$

$$c = \sqrt{x^2 - 1} \Big|_{(1,0)}$$

## Exemplo 6 – Solução

Domínio

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$x^2 \geq 1$$

$$|x| \geq 1$$

$$x \leq -1 \quad \text{ou} \quad x \geq 1$$

$$c = f(1, 0)$$

$$c = \sqrt{x^2 - 1} \Big|_{(1,0)}$$

$$c = \sqrt{1 - 1}$$

## Exemplo 6 – Solução

Domínio

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$x^2 \geq 1$$

$$|x| \geq 1$$

$$x \leq -1 \quad \text{ou} \quad x \geq 1$$

$$c = f(1, 0)$$

$$c = \sqrt{x^2 - 1} \Big|_{(1,0)}$$

$$c = \sqrt{1 - 1}$$

$$c = 0$$

## Exemplo 6 – Solução

$$f(x, y) = 0$$

## Exemplo 6 – Solução

$$f(x, y) = 0$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = 0$$

## Exemplo 6 – Solução

$$f(x, y) = 0$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

## Exemplo 6 – Solução

$$f(x, y) = 0$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

## Exemplo 6 – Solução

$$f(x, y) = 0$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$|x| = 1$$

## Exemplo 6 – Solução

$$f(x, y) = 0$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$|x| = 1$$

$$x = \pm 1$$

## Exemplo 6 – Solução

$$f(x, y) = 0$$

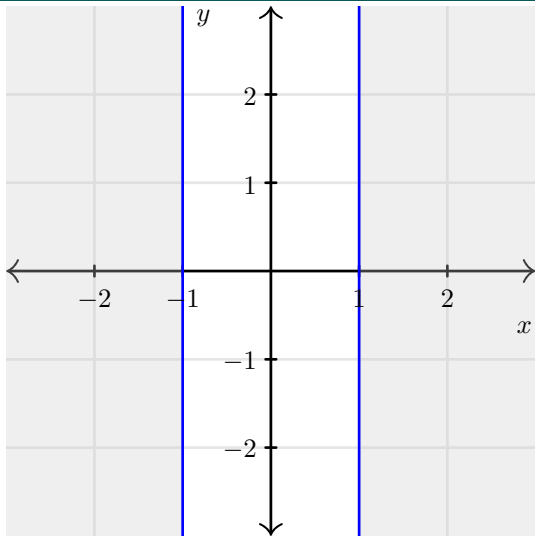
$$\sqrt{x^2 - 1} = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$|x| = 1$$

$$x = \pm 1$$



## Exemplo 7

Encontre uma equação para a superfície de nível da função

$$f(x, y, z) = \frac{x - y + z}{2x + y - z}$$

que passa pelo ponto  $(1, 0, -2)$

## Exemplo 7 – Solução

Domínio

$$2x + y - z \neq 0$$

# Exemplo 7 – Solução

Domínio

$$2x + y - z \neq 0$$

$$2x + y \neq z$$

# Exemplo 7 – Solução

Domínio

$$2x + y - z \neq 0$$

$$2x + y \neq z$$

$$z \neq 2x + y$$

## Exemplo 7 – Solução

$$c = f(1, 0, -2)$$

## Exemplo 7 – Solução

$$c = f(1, 0, -2)$$

$$c = \frac{x - y + z}{2x + y - z} \Big|_{(1,0,-2)}$$

## Exemplo 7 – Solução

$$c = f(1, 0, -2)$$

$$c = \frac{x - y + z}{2x + y - z} \Big|_{(1,0,-2)}$$

$$c = \frac{1 - 0 - 2}{2 \times 1 + 0 - (-2)}$$

## Exemplo 7 – Solução

$$c = f(1, 0, -2)$$

$$c = \frac{x - y + z}{2x + y - z} \Big|_{(1,0,-2)}$$

$$c = \frac{1 - 0 - 2}{2 \times 1 + 0 - (-2)}$$

$$c = \frac{-1}{4}$$

## Exemplo 7 – Solução

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{4}$$

## Exemplo 7 – Solução

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{x - y + z}{2x + y - z} = -\frac{1}{4}$$

## Exemplo 7 – Solução

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{x - y + z}{2x + y - z} = -\frac{1}{4}$$

$$-4(x - y + z) = 2x + y - z$$

## Exemplo 7 – Solução

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{x - y + z}{2x + y - z} = -\frac{1}{4}$$

$$-4(x - y + z) = 2x + y - z$$

$$-4x + 4y - 4z = 2x + y - z$$

## Exemplo 7 – Solução

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{x - y + z}{2x + y - z} = -\frac{1}{4}$$

$$-4(x - y + z) = 2x + y - z$$

$$-4x + 4y - 4z = 2x + y - z$$

$$-4z + z = 2x + y + 4x - 4y$$

## Exemplo 7 – Solução

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{x - y + z}{2x + y - z} = -\frac{1}{4}$$

$$-4(x - y + z) = 2x + y - z$$

$$-4x + 4y - 4z = 2x + y - z$$

$$-4z + z = 2x + y + 4x - 4y$$

$$-3z = 6x - 3y$$

## Exemplo 7 – Solução

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{x - y + z}{2x + y - z} = -\frac{1}{4}$$

$$-4(x - y + z) = 2x + y - z$$

$$-4x + 4y - 4z = 2x + y - z$$

$$-4z + z = 2x + y + 4x - 4y$$

$$-3z = 6x - 3y$$

$$z = -2x + y$$

## Exemplo 8

Encontre a equação e esboce para a superfície de nível da função

$$f(x, y, z) = \frac{x - y + z}{2x + y - z}$$

que passa pelo ponto  $(1, 0, -2)$

## Exemplo 8 – Solução

Domínio

$$2x + y - z \neq 0$$

## Exemplo 8 – Solução

Domínio

$$2x + y - z \neq 0$$

$$2x + y \neq z$$

## Exemplo 8 – Solução

Domínio

$$2x + y - z \neq 0$$

$$2x + y \neq z$$

$$z \neq 2x + y$$

## Exemplo 8 – Solução

$$c = f(1, 0, -2)$$

## Exemplo 8 – Solução

$$c = f(1, 0, -2)$$

$$c = \frac{x - y + z}{2x + y - z} \Big|_{(1,0,-2)}$$

## Exemplo 8 – Solução

$$c = f(1, 0, -2)$$

$$c = \frac{x - y + z}{2x + y - z} \Big|_{(1,0,-2)}$$

$$c = \frac{1 - 0 - 2}{2 \times 1 + 0 - (-2)}$$

## Exemplo 8 – Solução

$$c = f(1, 0, -2)$$

$$c = \frac{x - y + z}{2x + y - z} \Big|_{(1,0,-2)}$$

$$c = \frac{1 - 0 - 2}{2 \times 1 + 0 - (-2)}$$

$$c = \frac{-1}{4}$$

## Exemplo 8 – Solução

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{4}$$

## Exemplo 8 – Solução

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{x - y + z}{2x + y - z} = -\frac{1}{4}$$

## Exemplo 8 – Solução

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{x - y + z}{2x + y - z} = -\frac{1}{4}$$

$$-4(x - y + z) = 2x + y - z$$

## Exemplo 8 – Solução

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{x - y + z}{2x + y - z} = -\frac{1}{4}$$

$$-4(x - y + z) = 2x + y - z$$

$$-4x + 4y - 4z = 2x + y - z$$

## Exemplo 8 – Solução

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{x - y + z}{2x + y - z} = -\frac{1}{4}$$

$$-4(x - y + z) = 2x + y - z$$

$$-4x + 4y - 4z = 2x + y - z$$

$$-4z + z = 2x + y + 4x - 4y$$

## Exemplo 8 – Solução

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{x - y + z}{2x + y - z} = -\frac{1}{4}$$

$$-4(x - y + z) = 2x + y - z$$

$$-4x + 4y - 4z = 2x + y - z$$

$$-4z + z = 2x + y + 4x - 4y$$

$$-3z = 6x - 3y$$

## Exemplo 8 – Solução

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{x - y + z}{2x + y - z} = -\frac{1}{4}$$

$$-4(x - y + z) = 2x + y - z$$

$$-4x + 4y - 4z = 2x + y - z$$

$$-4z + z = 2x + y + 4x - 4y$$

$$-3z = 6x - 3y$$

$$z = -2x + y$$

## Exemplo 9

Encontre a equação e esboce para a superfície de nível da função

$$f(x, y, z) = \sqrt{x - y} - \ln(z)$$

que passa pelo ponto  $(3, -1, 1)$

## Exemplo 9 – Solução

Domínio

## Exemplo 9 – Solução

Domínio

$$x - y \geq 0$$

## Exemplo 9 – Solução

Domínio

$$x - y \geq 0$$

$$x \geq y$$

## Exemplo 9 – Solução

Domínio

$$x - y \geq 0$$

$$x \geq y$$

e

$$z > 0$$

## Exemplo 9 – Solução

$$c = f(3, -1, 1)$$

## Exemplo 9 – Solução

$$c = f(3, -1, 1)$$

$$c = \sqrt{x - y} - \ln(z) \Big|_{(3, -1, 1)}$$

## Exemplo 9 – Solução

$$c = f(3, -1, 1)$$

$$c = \sqrt{x - y} - \ln(z) \Big|_{(3, -1, 1)}$$

$$c = \sqrt{3 - (-1)} - \ln(1)$$

## Exemplo 9 – Solução

$$c = f(3, -1, 1)$$

$$c = \sqrt{x - y} - \ln(z) \Big|_{(3, -1, 1)}$$

$$c = \sqrt{3 - (-1)} - \ln(1)$$

$$c = \sqrt{4}$$

## Exemplo 9 – Solução

$$c = f(3, -1, 1)$$

$$c = \sqrt{x - y} - \ln(z) \Big|_{(3, -1, 1)}$$

$$c = \sqrt{3 - (-1)} - \ln(1)$$

$$c = \sqrt{4}$$

$$c = 2$$

## Exemplo 9 – Solução

$$f(x, y, z) = 2$$

## Exemplo 9 – Solução

$$f(x, y, z) = 2$$

$$\sqrt{x - y} - \ln(z) = 2$$

## Exemplo 9 – Solução

$$f(x, y, z) = 2$$

$$\sqrt{x - y} - \ln(z) = 2$$

$$\sqrt{x - y} = 2 + \ln(z)$$

## Exemplo 9 – Solução

$$f(x, y, z) = 2$$

$$\sqrt{x - y} - \ln(z) = 2$$

$$\sqrt{x - y} = 2 + \ln(z)$$

$$-4x + 4y - 4z = 2x + y - z$$

## Exemplo 9 – Solução

$$f(x, y, z) = 2$$

$$\sqrt{x - y} - \ln(z) = 2$$

$$\sqrt{x - y} = 2 + \ln(z)$$

$$-4x + 4y - 4z = 2x + y - z$$

$$-4z + z = 2x + y + 4x - 4y$$

## Exemplo 9 – Solução

$$f(x, y, z) = 2$$

$$\sqrt{x - y} - \ln(z) = 2$$

$$\sqrt{x - y} = 2 + \ln(z)$$

$$-4x + 4y - 4z = 2x + y - z$$

$$-4z + z = 2x + y + 4x - 4y$$

$$-3z = 6x - 3y$$

## Exemplo 9 – Solução

$$f(x, y, z) = 2$$

$$\sqrt{x - y} - \ln(z) = 2$$

$$\sqrt{x - y} = 2 + \ln(z)$$

$$-4x + 4y - 4z = 2x + y - z$$

$$-4z + z = 2x + y + 4x - 4y$$

$$-3z = 6x - 3y$$

$$z = -2x + y$$

# Conteúdo

Curvas de Nível

Exemplos

**Lista Mínima**

# Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12<sup>a</sup> ed. – Seção 14.1

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 17-23, 31-36

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações