

Continuidade de Funções de Várias Variáveis

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/pages/cfvv1>

Conteúdo

Continuidade

Valor Extremo de Função Contínua

Lista Mínima

Definição

Uma função $f(x, y)$ é **contínua no ponto** (a, b) , se

1. f é definida em (a, b)

Definição

Uma função $f(x, y)$ é **contínua no ponto** (a, b) , se

1. f é definida em (a, b)
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ existe

Definição

Uma função $f(x, y)$ é **contínua no ponto** (a, b) , se

1. f é definida em (a, b)

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ existe

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$

Definição

Uma função $f(x, y)$ é **contínua no ponto** (a, b) , se

1. f é definida em (a, b)
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ existe
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$

Uma **função é contínua** se for contínua em todos os pontos do seu domínio

Limite de Função Contínua

Se $f(x, y)$ é contínua em (a, b) ,

Limite de Função Contínua

Se $f(x, y)$ é contínua em (a, b) , então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$$

Limite de Função Contínua

Se $f(x, y)$ é contínua em (a, b) , então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Combinações Algébricas

Combinações algébricas de funções contínuas são funções contínuas, exceto por divisões por zero, raízes de números negativos, ...

Combinações Algébricas

Combinações algébricas de funções contínuas são funções contínuas, exceto por divisões por zero, raízes de números negativos, ...

Aplicação direta das propriedades de limites

Algumas Funções Contínuas

1. $f(x, y) = x$

Algumas Funções Contínuas

1. $f(x, y) = x$

2. $f(x, y) = y$

Algumas Funções Contínuas

1. $f(x, y) = x$
2. $f(x, y) = y$
3. $f(x, y) = xy$

Algumas Funções Contínuas

1. $f(x, y) = x$
2. $f(x, y) = y$
3. $f(x, y) = xy$
4. $f(x, y) = x^n$ para n inteiro positivo

Algumas Funções Contínuas

1. $f(x, y) = x$
2. $f(x, y) = y$
3. $f(x, y) = xy$
4. $f(x, y) = x^n$ para n inteiro positivo
5. $f(x, y) = y^n$ para n inteiro positivo

Exemplo 1

Mostre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua em todos os pontos, exceto na origem

Exemplo 1 – Solução

Consideramos primeiro o caso $(x, y) \neq (0, 0)$

Exemplo 1 – Solução

Consideramos primeiro o caso $(x, y) \neq (0, 0)$

$2xy$ é uma função contínua no plano

Exemplo 1 – Solução

Consideramos primeiro o caso $(x, y) \neq (0, 0)$

$2xy$ é uma função contínua no plano

$x^2 + y^2$ é uma função contínua no plano

Exemplo 1 – Solução

Consideramos primeiro o caso $(x, y) \neq (0, 0)$

$2xy$ é uma função contínua no plano

$x^2 + y^2$ é uma função contínua no plano

então $\frac{2xy}{x^2 + y^2}$

Exemplo 1 – Solução

Consideramos primeiro o caso $(x, y) \neq (0, 0)$

$2xy$ é uma função contínua no plano

$x^2 + y^2$ é uma função contínua no plano

então $\frac{2xy}{x^2 + y^2}$ é contínua para todo $(x, y) \neq (0, 0)$

Exemplo 1 – Solução

Em $(x, y) = (0, 0)$ temos que aplicar a definição de continuidade

Exemplo 1 – Solução

Em $(x, y) = (0, 0)$ temos que aplicar a definição de continuidade

1. f é definida em $(0, 0)$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existe
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$

Exemplo 1 – Solução

Em $(x, y) = (0, 0)$ temos que aplicar a definição de continuidade

1. f é definida em $(0, 0)$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existe
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$

A condição 1 vale, pois $f(0, 0) = 0$

Exemplo 1 – Solução

Verificando a condição 2, percebemos que o limite não existe

Exemplo 1 – Solução

Verificando a condição 2, percebemos que o limite não existe

Se fizermos $y = mx$,

Exemplo 1 – Solução

Verificando a condição 2, percebemos que o limite não existe

Se fizermos $y = mx$, para $m \neq 0$ e $x \neq 0$, temos

Exemplo 1 – Solução

Verificando a condição 2, percebemos que o limite não existe

Se fizermos $y = mx$, para $m \neq 0$ e $x \neq 0$, temos

$$f(x, y) \Big|_{y=mx}$$

Exemplo 1 – Solução

Verificando a condição 2, percebemos que o limite não existe

Se fizermos $y = mx$, para $m \neq 0$ e $x \neq 0$, temos

$$f(x, y) \Big|_{y=mx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \Big|_{y=mx}$$

Exemplo 1 – Solução

Verificando a condição 2, percebemos que o limite não existe

Se fizermos $y = mx$, para $m \neq 0$ e $x \neq 0$, temos

$$f(x, y) \Big|_{y=mx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \Big|_{y=mx} = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2}$$

Exemplo 1 – Solução

Verificando a condição 2, percebemos que o limite não existe

Se fizermos $y = mx$, para $m \neq 0$ e $x \neq 0$, temos

$$f(x, y) \Big|_{y=mx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \Big|_{y=mx} = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2mx^2}{(1 + m^2)x^2}$$

Exemplo 1 – Solução

Verificando a condição 2, percebemos que o limite não existe

Se fizermos $y = mx$, para $m \neq 0$ e $x \neq 0$, temos

$$f(x, y) \Big|_{y=mx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \Big|_{y=mx} = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2mx^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

Exemplo 1 – Solução

Verificando a condição 2, percebemos que o limite não existe

Se fizermos $y = mx$, para $m \neq 0$ e $x \neq 0$, temos

$$f(x, y) \Big|_{y=mx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \Big|_{y=mx} = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2mx^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

Para cada valor de m , a função f se aproxima da origem com um valor diferente.

Exemplo 1 – Solução

Verificando a condição 2, percebemos que o limite não existe

Se fizermos $y = mx$, para $m \neq 0$ e $x \neq 0$, temos

$$f(x, y) \Big|_{y=mx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \Big|_{y=mx} = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2mx^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

Para cada valor de m , a função f se aproxima da origem com um valor diferente.

Portanto, o limite não existe e a função não é contínua na origem

Continuidade de Compostas

Se $f(x, y)$ é contínua em (a, b)

Continuidade de Compostas

Se $f(x, y)$ é contínua em (a, b)

e g é uma função, de uma variável, contínua em $z_0 = f(a, b)$

Continuidade de Compostas

Se $f(x, y)$ é contínua em (a, b)

e g é uma função, de uma variável, contínua em $z_0 = f(a, b)$

então a função composta $h = g \circ f$

Continuidade de Compostas

Se $f(x, y)$ é contínua em (a, b)

e g é uma função, de uma variável, contínua em $z_0 = f(a, b)$

então a função composta $h = g \circ f$ definida como

$$h(x, y) = g(f(x, y))$$

Continuidade de Compostas

Se $f(x, y)$ é contínua em (a, b)

e g é uma função, de uma variável, contínua em $z_0 = f(a, b)$

então a função composta $h = g \circ f$ definida como

$$h(x, y) = g(f(x, y))$$

é contínua em (a, b)

Exemplo 2

Mostre que

$$f(x, y) = \cos \left(\frac{xy}{x^2 + 1} \right)$$

é contínua em todos os pontos do plano

Exemplo 2 – Solução

Primeiro reconhecemos que temos a composição de funções $f = g \circ h$,

Exemplo 2 – Solução

Primeiro reconhecemos que temos a composição de funções $f = g \circ h$, com

$$h(x, y) = \frac{xy}{x^2 + 1} \quad \text{e} \quad g(t) = \cos(t)$$

Exemplo 2 – Solução

Primeiro reconhecemos que temos a composição de funções $f = g \circ h$, com

$$h(x, y) = \frac{xy}{x^2 + 1} \quad \text{e} \quad g(t) = \cos(t)$$

isso é,

$$f(x, y) = g(h(x, y)) = \cos\left(\frac{xy}{x^2 + 1}\right)$$

Exemplo 2 – Solução

h é uma combinação algébrica de funções contínuas e nunca teremos uma divisão por zero, portanto, h é contínua em todo o plano

Exemplo 2 – Solução

h é uma combinação algébrica de funções contínuas e nunca teremos uma divisão por zero, portanto, h é contínua em todo o plano

g é uma função contínua em toda a reta real, portanto, qualquer que seja o ponto (x_0, y_0) a função g será contínua em $h(x_0, y_0)$

Exemplo 2 – Solução

h é uma combinação algébrica de funções contínuas e nunca teremos uma divisão por zero, portanto, h é contínua em todo o plano

g é uma função contínua em toda a reta real, portanto, qualquer que seja o ponto (x_0, y_0) a função g será contínua em $h(x_0, y_0)$

Pelo teorema da continuidade da composta, f é contínua em todo o plano

Conteúdo

Continuidade

Valor Extremo de Função Contínua

Lista Mínima

Teorema do Valor Extremo

Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função **contínua** em uma região R ,

Teorema do Valor Extremo

Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função **contínua** em uma região R ,
fechada e limitada (compacta),

Teorema do Valor Extremo

Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função **contínua** em uma região R ,

fechada e limitada (compacta),

a função assume **um máximo e um mínimo absolutos** em R

Conteúdo

Continuidade

Valor Extremo de Função Contínua

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 14.2

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 31, 33, 35, 37, 60

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações