Propriedades do Vetor Gradiente

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

11 de março de 2026

https://material-didatico.github.io/pages/cfvv1

Conteúdo

Vetor Gradiente

Se uma função $f(x, y)$ é derivável, seu vetor gradiente é

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Vetor Gradiente 3D

Se uma função $f(x, y, z)$ é derivável, seu vetor gradiente é

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Conteúdo

Derivada Direcional

$D_u f$

Derivada Direcional

$$D_u f = \nabla f \cdot u$$

Derivada Direcional

$$D_u f = \nabla f \cdot \boldsymbol{u}$$

$$= \|\nabla f\| \, \|\boldsymbol{u}\| \cos(\theta)$$

Derivada Direcional

$$
\begin{aligned}
D_u f &= \nabla f \cdot \boldsymbol{u} \\
&= \|\nabla f\| \, \|\boldsymbol{u}\| \cos(\theta) \\
&= \|\nabla f\| \cos(\theta)
\end{aligned}
$$

Crescimento da Função

1. A função aumenta mais rapidamente quando

Crescimento da Função

1. A função aumenta mais rapidamente quando $\cos(\theta) = 1$,

Crescimento da Função

1. A função aumenta mais rapidamente quando $\cos(\theta) = 1, \qquad \theta = 0$

Crescimento da Função

1. A função aumenta mais rapidamente quando $\cos(\theta) = 1, \qquad \theta = 0$

   Direção do gradiente

Crescimento da Função

1. A função aumenta mais rapidamente quando $\quad \cos(\theta) = 1, \qquad \theta = 0$

   Direção do gradiente

2. A função descresse mais rapidamente quando

Crescimento da Função

1. A função aumenta mais rapidamente quando $\cos(\theta) = 1, \qquad \theta = 0$

   Direção do gradiente

2. A função descresse mais rapidamente quando $\cos(\theta) = -1,$

Crescimento da Função

1. A função aumenta mais rapidamente quando $\cos(\theta) = 1, \qquad \theta = 0$

   Direção do gradiente

2. A função descresse mais rapidamente quando $\cos(\theta) = -1, \quad \theta = \pi$

Crescimento da Função

1. A função aumenta mais rapidamente quando $\cos(\theta) = 1, \qquad \theta = 0$

   Direção do gradiente

2. A função descresse mais rapidamente quando $\cos(\theta) = -1, \quad \theta = \pi$

   Direção oposta ao gradiente

Crescimento da Função

1. A função aumenta mais rapidamente quando $\cos(\theta) = 1, \qquad \theta = 0$

   Direção do gradiente

2. A função descresse mais rapidamente quando $\cos(\theta) = -1, \qquad \theta = \pi$

   Direção oposta ao gradiente

3. Se u for ortogonal a $\nabla f \neq 0$

Crescimento da Função

1. A função aumenta mais rapidamente quando $\cos(\theta) = 1, \qquad \theta = 0$

   Direção do gradiente

2. A função descresse mais rapidamente quando $\cos(\theta) = -1, \quad \theta = \pi$

   Direção oposta ao gradiente

3. Se u for ortogonal a $\nabla f \neq 0$ ele aponta para uma direção de variação nula

Gradientes e Crescimento da Função

1. Direção de maior crescimento da função f no ponto (x, y)

$$v_M = \nabla f(x, y)$$

Gradientes e Crescimento da Função

1. Direção de maior crescimento da função f no ponto (x, y)

$$v_M = \nabla f(x, y)$$

2. Direção de maior decrescimento da função f no ponto (x, y)

$$v_m = -\nabla f(x, y)$$

Gradientes e Crescimento da Função

1. Direção de maior crescimento da função f no ponto (x, y)

$$v_M = \nabla f(x, y)$$

2. Direção de maior decrescimento da função f no ponto (x, y)

$$v_m = -\nabla f(x, y)$$

3. Direção de variação nula da função f no ponto (x, y)

$$\nabla f(x, y) \cdot v_o = 0$$

Exemplo 1

Analisando a função $f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2}$ no ponto $(1, 1)$

Encontre as direções nas quais:

a) f cresce mais rapidamente

b) f decresce mais rapidamente

c) f não varia

Exemplo 1 – Calculando as Derivadas Parciais

Exemplo 1 – Calculando as Derivadas Parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

Exemplo 1 – Calculando as Derivadas Parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right)$$

Exemplo 1 – Calculando as Derivadas Parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) = 2x$$

Exemplo 1 – Calculando as Derivadas Parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

Exemplo 1 – Calculando as Derivadas Parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right)$$

Exemplo 1 – Calculando as Derivadas Parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) = y$$

Exemplo 1 – Gradiente

$\nabla f(x, y)$

Exemplo 1 – Gradiente

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Gradiente

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + \dfrac{y^2}{2}\right) \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \dfrac{y^2}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Gradiente

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + \dfrac{y^2}{2}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \dfrac{y^2}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Gradiente

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + \dfrac{y^2}{2}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \dfrac{y^2}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

Avaliando o gradiente no ponto solicitado

Exemplo 1 – Gradiente

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + \dfrac{y^2}{2}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \dfrac{y^2}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

Avaliando o gradiente no ponto solicitado

$$\nabla f(1, 1)$$

Exemplo 1 – Gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + \dfrac{y^2}{2}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \dfrac{y^2}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

Avaliando o gradiente no ponto solicitado

$$\nabla f(1,1) \;=\; \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)}$$

Exemplo 1 – Gradiente

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + \dfrac{y^2}{2}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \dfrac{y^2}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

Avaliando o gradiente no ponto solicitado

$$\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

a) f cresce mais rapidamente

Exemplo 1 – Solução

a) f cresce mais rapidamente na direção do gradiente

Exemplo 1 – Solução

a) f cresce mais rapidamente na direção do gradiente

v_M

Exemplo 1 – Solução

a) f cresce mais rapidamente na direção do gradiente

$$v_M = \nabla f(1, 1)$$

Exemplo 1 – Solução

a) f cresce mais rapidamente na direção do gradiente

$$v_M = \nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

a) f cresce mais rapidamente na direção do gradiente

$$v_M = \nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) f decresce mais rapidamente

Exemplo 1 – Solução

a) f cresce mais rapidamente na direção do gradiente

$$v_M = \nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) f decresce mais rapidamente na direção oposta ao gradiente

Exemplo 1 – Solução

a) f cresce mais rapidamente na direção do gradiente

$$v_M = \nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) f decresce mais rapidamente na direção oposta ao gradiente

$$v_m$$

Exemplo 1 – Solução

a) f cresce mais rapidamente na direção do gradiente

$$v_M = \nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) f decresce mais rapidamente na direção oposta ao gradiente

$$v_m = -\nabla f(1,1)$$

Exemplo 1 – Solução

a) f cresce mais rapidamente na direção do gradiente

$$v_M = \nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) f decresce mais rapidamente na direção oposta ao gradiente

$$v_m = -\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

c) f não varia

Exemplo 1 – Solução

c) f não varia na direção, v_o, ortogonal ao gradiente

Exemplo 1 – Solução

c) f não varia na direção, v_o, ortogonal ao gradiente

$$\nabla f(1,1) \cdot v_o = 0$$

Exemplo 1 – Solução

c) f não varia na direção, v_o, ortogonal ao gradiente

$$\nabla f(1,1) \cdot v_o = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Exemplo 1 – Solução

c) f não varia na direção, v_o, ortogonal ao gradiente

$$\nabla f(1,1) \cdot v_o = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$2v_1 + v_2 = 0$$

Exemplo 1 – Solução

c) f não varia na direção, v_o, ortogonal ao gradiente

$$\nabla f(1,1) \cdot v_o = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$2v_1 + v_2 = 0$$

$$v_2 = -2v_1$$

Exemplo 1 – Solução

c) f não varia na direção, v_o, ortogonal ao gradiente

$$\nabla f(1,1) \cdot v_o = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$2v_1 + v_2 = 0$$

$$v_2 = -2v_1$$

As direções são $v_o = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Exemplo 1 – Solução

c) f não varia na direção, v_o, ortogonal ao gradiente

$$\nabla f(1,1) \cdot v_o = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$2v_1 + v_2 = 0$$

$$v_2 = -2v_1$$

As direções são $v_o = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $v_o = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Conteúdo

Curvas de Nível

Curva de Nível é o conjunto de pontos (x, y) onde

$$f(x, y) = c$$

para um valor constante c

Curvas de Nível

Curva de Nível é o conjunto de pontos (x, y) onde

$$f(x, y) = c$$

para um valor constante c

Em alguns casos, é possível escrever essa região como uma curva paramétrica

$$x = g(t) \qquad y = h(t)$$

Curvas de Nível

Curva de Nível é o conjunto de pontos (x, y) onde

$$f(x, y) = c$$

para um valor constante c

Em alguns casos, é possível escrever essa região como uma curva paramétrica

$$x = g(t) \qquad y = h(t)$$

Vetorialmente temos

$$r(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$$

Tangente de uma Curva de Nível

$$f\big(g(t), h(t)\big) = c$$

Tangente de uma Curva de Nível

$$f\big(g(t), h(t)\big) = c$$

$$\frac{d}{dt}f\big(g(t), h(t)\big) = 0$$

Tangente de uma Curva de Nível

$$f\big(g(t), h(t)\big) = c$$

$$\frac{d}{dt} f\big(g(t), h(t)\big) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} = 0$$

Tangente de uma Curva de Nível

$$f\big(g(t), h(t)\big) = c$$

$$\frac{d}{dt}f\big(g(t), h(t)\big) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{dg}{dt} \\[2ex] \dfrac{dh}{dt} \end{pmatrix} = 0$$

Tangente de uma Curva de Nível

$$f\big(g(t), h(t)\big) = c$$

$$\frac{d}{dt} f\big(g(t), h(t)\big) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{dg}{dt} \\[2ex] \dfrac{dh}{dt} \end{pmatrix} = 0$$

$$\nabla f \cdot \frac{dr}{dt} = 0$$

Tangente de uma Curva de Nível

$$f\big(g(t), h(t)\big) = c$$

$$\frac{d}{dt} f\big(g(t), h(t)\big) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{dg}{dt} \\[2ex] \dfrac{dh}{dt} \end{pmatrix} = 0$$

$$\nabla f \cdot \frac{dr}{dt} = 0$$

O gradiente é ortogonal ao vetor tangente à curva de nível

Funções Diferenciáveis

Em todo ponto (a, b) no domínio de uma função diferenciável $f(x, y)$,

Funções Diferenciáveis

Em todo ponto (a, b) no domínio de uma função diferenciável $f(x, y)$,

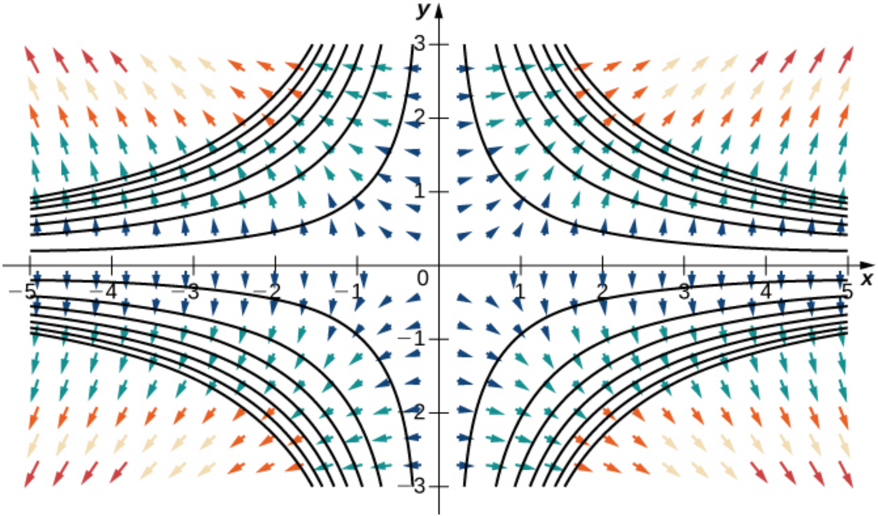
o gradiente de f

Funções Diferenciáveis

Em todo ponto (a, b) no domínio de uma função diferenciável $f(x, y)$,

o gradiente de f é normal à curva de nível que passa por (a, b)

Gradientes e Curvas de Nível



Exemplo 2

Dada a função

$$f(x, y) = 6x - 3y + 9$$

a) Determine e esboce a curva de nível $f(x, y) = 6$

b) Calcule e esboce o gradiente de f nos pontos $(0, 1)$ e $(1, 3)$

Exemplo 2 – Solução

a) Determinando a curva de nível

Exemplo 2 – Solução

a) Determinando a curva de nível

$$f(x, y) = 6$$

Exemplo 2 – Solução

a) Determinando a curva de nível

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 6 \\ 6x - 3y + 9 &= 6 \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

a) Determinando a curva de nível

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= 6 \\
6x - 3y + 9 &= 6 \\
-3y &= 6 - 6x - 9
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Solução

a) Determinando a curva de nível

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= 6 \\
6x - 3y + 9 &= 6 \\
-3y &= 6 - 6x - 9 \\
-3y &= -6x - 3
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Solução

a) Determinando a curva de nível

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 6 \\ 6x - 3y + 9 &= 6 \\ -3y &= 6 - 6x - 9 \\ -3y &= -6x - 3 \\ y &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

a) Determinando a curva de nível

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= 6 \\
6x - 3y + 9 &= 6 \\
-3y &= 6 - 6x - 9 \\
-3y &= -6x - 3 \\
y &= 2x + 1
\end{aligned}
$$

A curva de nível é uma reta

Exemplo 2 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

Exemplo 2 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

Exemplo 2 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(6x - 3y + 9)$$

Exemplo 2 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(6x - 3y + 9) = 6$$

Exemplo 2 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(6x - 3y + 9\right) = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

Exemplo 2 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(6x - 3y + 9) = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(6x - 3y + 9)$$

Exemplo 2 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(6x - 3y + 9) = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(6x - 3y + 9) = -3$$

Exemplo 2 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(6x - 3y + 9) = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(6x - 3y + 9) = -3$$

Gradiente de f

Exemplo 2 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(6x - 3y + 9) = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(6x - 3y + 9) = -3$$

Gradiente de f

$$\nabla f(x, y)$$

Exemplo 2 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(6x - 3y + 9) = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(6x - 3y + 9) = -3$$

Gradiente de f

$$\nabla f(x, y) = \nabla (6x - 3y + 9)$$

Exemplo 2 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(6x - 3y + 9) = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(6x - 3y + 9) = -3$$

Gradiente de f

$$\nabla f(x, y) = \nabla (6x - 3y + 9) = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(0, 1)$ e $(1, 3)$

Exemplo 2 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(0, 1)$ e $(1, 3)$

$$\nabla f(0, 1)$$

Exemplo 2 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(0,1)$ e $(1,3)$

$$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(0, 1)$ e $(1, 3)$

$$\nabla f(0, 1) = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2, -1)$$

Exemplo 2 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(0,1)$ e $(1,3)$

$$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2,-1) = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3

Dada a função

$$f(x, y) = (x-2)^2 + (y-1)^2$$

a) Determine e esboce a curva de nível $f(x, y) = 4$

b) Calcule e esboce o gradiente de f nos pontos $(0, 1)$, $(2, -1)$, $(2, 3)$ e $(4, 1)$

Exemplo 3 – Solução

a) Determinando a curva de nível

Exemplo 3 – Solução

a) Determinando a curva de nível

$$f(x, y) = 4$$

Exemplo 3 – Solução

a) Determinando a curva de nível

$$f(x, y) = 4$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

Exemplo 3 – Solução

a) Determinando a curva de nível

$$f(x, y) = 4$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

Equação da circunferência centrada em $(2, 1)$ e raio 2

Exemplo 3 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

Exemplo 3 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

Exemplo 3 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-2)^2 + (y-1)^2\right]$$

Exemplo 3 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-2)^2 + (y-1)^2\right] = 2(x-2)\frac{\partial}{\partial x}(x-2)$$

Exemplo 3 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-2)^2 + (y-1)^2\right] = 2(x-2)\frac{\partial}{\partial x}(x-2) = 2(x-2)$$

Exemplo 3 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-2)^2+(y-1)^2\right] = 2(x-2)\frac{\partial}{\partial x}(x-2) = 2(x-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

Exemplo 3 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-2)^2+(y-1)^2\right] = 2(x-2)\frac{\partial}{\partial x}(x-2) = 2(x-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(x-2)^2+(y-1)^2\right]$$

Exemplo 3 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-2)^2+(y-1)^2\right] = 2(x-2)\frac{\partial}{\partial x}(x-2) = 2(x-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(x-2)^2+(y-1)^2\right] = 2(y-1)\frac{\partial}{\partial y}(y-1)$$

Exemplo 3 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-2)^2 + (y-1)^2\right] = 2(x-2)\frac{\partial}{\partial x}(x-2) = 2(x-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(x-2)^2 + (y-1)^2\right] = 2(y-1)\frac{\partial}{\partial y}(y-1) = 2(y-1)$$

Exemplo 3 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-2)^2 + (y-1)^2\right] = 2(x-2)\frac{\partial}{\partial x}(x-2) = 2(x-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(x-2)^2 + (y-1)^2\right] = 2(y-1)\frac{\partial}{\partial y}(y-1) = 2(y-1)$$

Gradiente de f

Exemplo 3 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-2)^2+(y-1)^2\right] \;=\; 2(x-2)\frac{\partial}{\partial x}(x-2) \;=\; 2(x-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \;=\; \frac{\partial}{\partial y}\left[(x-2)^2+(y-1)^2\right] \;=\; 2(y-1)\frac{\partial}{\partial y}(y-1) \;=\; 2(y-1)$$

Gradiente de f

$$\nabla f(x, y)$$

Exemplo 3 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-2)^2+(y-1)^2\right] = 2(x-2)\frac{\partial}{\partial x}(x-2) = 2(x-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(x-2)^2+(y-1)^2\right] = 2(y-1)\frac{\partial}{\partial y}(y-1) = 2(y-1)$$

Gradiente de f

$$\nabla f(x,y) = \nabla\left[(x-2)^2+(y-1)^2\right]$$

Exemplo 3 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-2)^2 + (y-1)^2\right] = 2(x-2)\frac{\partial}{\partial x}(x-2) = 2(x-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(x-2)^2 + (y-1)^2\right] = 2(y-1)\frac{\partial}{\partial y}(y-1) = 2(y-1)$$

Gradiente de f

$$\nabla f(x,y) = \nabla\left[(x-2)^2 + (y-1)^2\right] = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(0,1)$ e $(2,-1)$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(0, 1)$ e $(2, -1)$

$$\nabla f(0, 1)$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(0, 1)$ e $(2, -1)$

$$\nabla f(0, 1) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,1)}$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(0,1)$ e $(2,-1)$

$$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 2(0-2) \\ 2(1-1) \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(0,1)$ e $(2,-1)$

$$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 2(0-2) \\ 2(1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(0, 1)$ e $(2, -1)$

$$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 2(0-2) \\ 2(1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2,-1)$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(0,1)$ e $(2,-1)$

$$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 2(0-2) \\ 2(1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2,-1) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix} \Bigg|_{(2,-1)}$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(0, 1)$ e $(2, -1)$

$$\nabla f(0, 1) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 2(0-2) \\ 2(1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2, -1) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix} \Bigg|_{(2,-1)} = \begin{pmatrix} 2(2-2) \\ 2(-1-1) \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(0, 1)$ e $(2, -1)$

$$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 2(0-2) \\ 2(1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2,-1) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix} \Bigg|_{(2,-1)} = \begin{pmatrix} 2(2-2) \\ 2(-1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(2,3)$ e $(4,1)$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(2,3)$ e $(4,1)$

$$\nabla f(2,3)$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(2,3)$ e $(4,1)$

$$\nabla f(2,3) \; = \; \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix} \Bigg|_{(2,3)}$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(2,3)$ e $(4,1)$

$$\nabla f(2,3) \;=\; \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}\Bigg|_{(2,3)} \;=\; \begin{pmatrix} 2(2-2) \\ 2(2-1) \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(2, 3)$ e $(4, 1)$

$$\nabla f(2,3) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}\Bigg|_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 2(2-2) \\ 2(2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(2,3)$ e $(4,1)$

$$\nabla f(2,3) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}\Bigg|_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 2(2-2) \\ 2(2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(4,1)$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(2, 3)$ e $(4, 1)$

$$\nabla f(2,3) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}\Bigg|_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 2(2-2) \\ 2(2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(4,1) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}\Bigg|_{(4,1)}$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(2, 3)$ e $(4, 1)$

$$\nabla f(2,3) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix} \Bigg|_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 2(2-2) \\ 2(2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(4,1) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix} \Bigg|_{(4,1)} = \begin{pmatrix} 2(4-2) \\ 2(1-1) \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(2, 3)$ e $(4, 1)$

$$\nabla f(2,3) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}\Bigg|_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 2(2-2) \\ 2(2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(4,1) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}\Bigg|_{(4,1)} = \begin{pmatrix} 2(4-2) \\ 2(1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4

Encontre uma equação para a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

no ponto $(-2, 1)$

Note que a elipse é uma curva de nível da função

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$

Exemplo 4 – Derivadas parciais de f

Exemplo 4 – Derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

Exemplo 4 – Derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right)$$

Exemplo 4 – Derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) = \frac{x}{2}$$

Exemplo 4 – Derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) = \frac{x}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

Exemplo 4 – Derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) = \frac{x}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right)$$

Exemplo 4 – Derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) = \frac{x}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) = 2y$$

Exemplo 4 – Gradiente

Então o gradiente de f, no ponto $(-2, 1)$, é

Exemplo 4 – Gradiente

Então o gradiente de f, no ponto $\left(-2, 1\right)$, é

$$\nabla f\left(-2, 1\right)$$

Exemplo 4 – Gradiente

Então o gradiente de f, no ponto $(-2, 1)$, é

$$\nabla f(-2, 1) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{x}{2} \\[2ex] 2y \end{pmatrix}\Bigg|_{(-2,1)}$$

Exemplo 4 – Gradiente

Então o gradiente de f, no ponto $(-2, 1)$, é

$$\nabla f(-2,1) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{2} \\ \\ 2y \end{pmatrix}\Bigg|_{(-2,1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Reta Tangente

A reta tangente é ortogonal ao vetor gradiente

Exemplo 4 – Reta Tangente

A reta tangente é ortogonal ao vetor gradiente

$$\nabla f(a, b) \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} = 0$$

Exemplo 4 – Reta Tangente

A reta tangente é ortogonal ao vetor gradiente

$$\nabla f(a, b) \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} = 0$$

$$\nabla f(-2, 1) \cdot \begin{pmatrix} x - (-2) \\ y - 1 \end{pmatrix} = 0$$

Exemplo 4 – Reta Tangente

A reta tangente é ortogonal ao vetor gradiente

$$\nabla f(a,b) \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = 0$$

$$\nabla f(-2,1) \cdot \begin{pmatrix} x-(-2) \\ y-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0$$

Exemplo 4 – Reta Tangente

A reta tangente é ortogonal ao vetor gradiente

$$\nabla f(a,b) \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = 0$$

$$\nabla f(-2,1) \cdot \begin{pmatrix} x-(-2) \\ y-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-(x+2) + 2(y-1) = 0$$

Exemplo 4 – Reta Tangente

A reta tangente é ortogonal ao vetor gradiente

$$\nabla f(a,b) \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = 0$$

$$\nabla f(-2,1) \cdot \begin{pmatrix} x-(-2) \\ y-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-(x+2)+2(y-1) = 0$$

$$-x+2y-4 = 0$$

Exemplo 4 – Reta Tangente

A reta tangente é ortogonal ao vetor gradiente

$$\nabla f(a,b)\cdot\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = 0$$

$$\nabla f(-2,1)\cdot\begin{pmatrix} x-(-2) \\ y-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-(x+2)+2(y-1)=0$$

$$-x+2y-4=0$$

$$-x+2y=4$$

Exemplo 4 – Reta Tangente

A reta tangente é ortogonal ao vetor gradiente

$$\nabla f(a,b) \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = 0$$

$$\nabla f(-2,1) \cdot \begin{pmatrix} x-(-2) \\ y-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-(x+2)+2(y-1)=0$$

$$-x+2y-4=0$$

$$-x+2y=4$$

$$x=2y-4$$

Conteúdo

Propriedades Algébricas do Gradiente

1. Soma $$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$$

Propriedades Algébricas do Gradiente

1. Soma $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
2. Diferença $\nabla(f-g) = \nabla f - \nabla g$

Propriedades Algébricas do Gradiente

1. Soma $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
2. Diferença $\nabla(f-g) = \nabla f - \nabla g$
3. Multiplicação por constante $\nabla(kf) = k\nabla f$

Propriedades Algébricas do Gradiente

1. Soma $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
2. Diferença $\nabla(f-g) = \nabla f - \nabla g$
3. Multiplicação por constante $\nabla(kf) = k\nabla f$
4. Produto $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

Propriedades Algébricas do Gradiente

1. Soma $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
2. Diferença $\nabla(f-g) = \nabla f - \nabla g$
3. Multiplicação por constante $\nabla(kf) = k\nabla f$
4. Produto $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
5. Quociente $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

Exemplo 5

Dadas $f(x, y) = x^2 - 2y$ e $g(x, y) = xy^2$

a) calcule os gradientes de f e g

b) calcule $\nabla(f - g)$

c) calcule $\nabla(fg)$

Exemplo 5 – Solução

$$\nabla f$$

Exemplo 5 – Solução

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 2y\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 2y\right) \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 2y\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 2y\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 2y\right) \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 2y\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g$$

Exemplo 5 – Solução

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 2y\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 2y\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 2y\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 2y\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(xy^2\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(xy^2\right) \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 2y\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 2y\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(xy^2\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(xy^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\nabla(f - g)$$

Exemplo 5 – Solução

$$\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$$

Exemplo 5 – Solução

$$\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$$
$$= \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}
\nabla(f - g) &= \nabla f - \nabla g \\
&= \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x - y^2 \\ -2 - 2xy \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\nabla(fg)$$

Exemplo 5 – Solução

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\ &= (x^2 - 2y)\begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + (xy^2)\begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

$$
\begin{aligned}
\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\
&= (x^2 - 2y)\begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + (xy^2)\begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x^2 - 2y)y^2 \\ (x^2 - 2y)2xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (xy^2)2x \\ -(xy^2)2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 – Solução

$$
\begin{aligned}
\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\
&= (x^2 - 2y)\begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + (xy^2)\begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x^2 - 2y)y^2 \\ (x^2 - 2y)2xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (xy^2)2x \\ -(xy^2)2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x^2y^2 - 2y^3 \\ 2x^3y - 4xy^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x^2y^2 \\ -2xy^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}
\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\
&= (x^2 - 2y)\begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + (xy^2)\begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x^2 - 2y)y^2 \\ (x^2 - 2y)2xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (xy^2)2x \\ -(xy^2)2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x^2y^2 - 2y^3 \\ 2x^3y - 4xy^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x^2y^2 \\ -2xy^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3x^2y^2 - 2y^3 \\ 2x^3y - 6xy^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 14.5

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 20, 22, 24, 26, 28, 29

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações