

# Propriedades Algébricas do Gradiente

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



Propriedades Algébricas

# Propriedades Algébricas do Gradiente

## 1. Soma

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$$

# Propriedades Algébricas do Gradiente

1. Soma

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$$

2. Diferença

$$\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$$

# Propriedades Algébricas do Gradiente

1. Soma

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$$

2. Diferença

$$\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$$

3. Multiplicação por constante

$$\nabla(kf) = k\nabla f$$

# Propriedades Algébricas do Gradiente

1. Soma  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
2. Diferença  $\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$
3. Multiplicação por constante  $\nabla(kf) = k\nabla f$
4. Produto  $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

# Propriedades Algébricas do Gradiente

1. Soma  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
2. Diferença  $\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$
3. Multiplicação por constante  $\nabla(kf) = k\nabla f$
4. Produto  $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
5. Quociente  $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

# Exemplo 1

Dadas  $f(x, y) = x^2 - 2y$  e  $g(x, y) = xy^2$

a) calcule os gradientes de  $f$  e  $g$

b) calcule  $\nabla(f - g)$

c) calcule  $\nabla(fg)$

# Exemplo 1 – Solução

$$\nabla f$$

## Exemplo 1 – Solução

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

## Exemplo 1 – Solução

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 2y) \\ \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - 2y) \end{pmatrix}$$

## Exemplo 1 – Solução

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 2y) \\ \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - 2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix}$$

## Exemplo 1 – Solução

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 2y) \\ \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - 2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g$$

## Exemplo 1 – Solução

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 2y) \\ \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - 2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

## Exemplo 1 – Solução

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 2y) \\ \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - 2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (xy^2) \\ \frac{\partial}{\partial y} (xy^2) \end{pmatrix}$$

## Exemplo 1 – Solução

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 2y) \\ \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - 2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (xy^2) \\ \frac{\partial}{\partial y} (xy^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

# Exemplo 1 – Solução

$$\nabla(f - g)$$

## Exemplo 1 – Solução

$$\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$$

## Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\nabla(f - g) &= \nabla f - \nabla g \\ &= \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}\end{aligned}$$

## Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\nabla(f - g) &= \nabla f - \nabla g \\ &= \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x - y^2 \\ -2 - 2xy \end{pmatrix}\end{aligned}$$

# Exemplo 1 – Solução

$$\nabla(fg)$$

## Exemplo 1 – Solução

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

## Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\ &= (x^2 - 2y) \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + (xy^2) \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

## Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\ &= (x^2 - 2y) \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + (xy^2) \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x^2 - 2y)y^2 \\ (x^2 - 2y)2xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (xy^2)2x \\ -(xy^2)2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

## Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\ &= (x^2 - 2y) \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + (xy^2) \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x^2 - 2y)y^2 \\ (x^2 - 2y)2xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (xy^2)2x \\ -(xy^2)2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2y^2 - 2y^3 \\ 2x^3y - 4xy^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x^2y^2 \\ -2xy^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

## Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\ &= (x^2 - 2y) \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + (xy^2) \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x^2 - 2y)y^2 \\ (x^2 - 2y)2xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (xy^2)2x \\ -(xy^2)2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2y^2 - 2y^3 \\ 2x^3y - 4xy^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x^2y^2 \\ -2xy^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x^2y^2 - 2y^3 \\ 2x^3y - 6xy^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$