

Erro na Linearização

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/pages/cfvv1>

Conteúdo

Erro na Aproximação Linear

Exemplos

Lista Mínima

Erro na Aproximação Linear

Se f possui primeira e segunda derivadas parciais

Erro na Aproximação Linear

Se f possui primeira e segunda derivadas parciais sobre um conjunto aberto contendo um retângulo R centrado em (a, b)

Erro na Aproximação Linear

Se f possui primeira e segunda derivadas parciais sobre um conjunto aberto contendo um retângulo R centrado em (a, b) e se M é um limitante superior para os valores de $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$ e $|f_{xy}|$ em R

Erro na Aproximação Linear

Se f possui primeira e segunda derivadas parciais sobre um conjunto aberto contendo um retângulo R centrado em (a, b) e se M é um limitante superior para os valores de $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$ e $|f_{xy}|$ em R

$$|f_{xx}| \leq M \quad |f_{yy}| \leq M \quad |f_{xy}| \leq M \quad \forall (x, y) \in R$$

Erro na Aproximação Linear

Se f possui primeira e segunda derivadas parciais sobre um conjunto aberto contendo um retângulo R centrado em (a, b) e se M é um limitante superior para os valores de $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$ e $|f_{xy}|$ em R

$$|f_{xx}| \leq M \quad |f_{yy}| \leq M \quad |f_{xy}| \leq M \quad \forall (x, y) \in R$$

então o erro na linearização

$$E(x, y) = f(x, y) - L(x, y)$$

Erro na Aproximação Linear

Se f possui primeira e segunda derivadas parciais sobre um conjunto aberto contendo um retângulo R centrado em (a, b) e se M é um limitante superior para os valores de $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$ e $|f_{xy}|$ em R

$$|f_{xx}| \leq M \quad |f_{yy}| \leq M \quad |f_{xy}| \leq M \quad \forall (x, y) \in R$$

então o erro na linearização

$$E(x, y) = f(x, y) - L(x, y)$$

satisfaz

$$|E(x, y)| \leq \frac{M}{2} (|x - a| + |y - b|)^2$$

Conteúdo

Erro na Aproximação Linear

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 1

Encontre um limitante superior para o erro na aproximação

$$f(x, y) \approx L(x, y) = 4x - y - 2$$

no retângulo

$$R : |x - 3| \leq 0,1, \quad |y - 2| \leq 0,1$$

Exemplo 1 – Calculando os módulos das derivadas segundas

$$f_{xx}(x, y)$$

Exemplo 1 – Calculando os módulos das derivadas segundas

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3 \right)$$

Exemplo 1 – Calculando os módulos das derivadas segundas

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (2x - y) \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Calculando os módulos das derivadas segundas

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3 \right) \\&= \frac{\partial}{\partial x} (2x - y) \\&= 2\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Calculando os módulos das derivadas segundas

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3 \right) \\&= \frac{\partial}{\partial x} (2x - y) \\&= 2\end{aligned}$$

$$|f_{xx}(x, y)|$$

Exemplo 1 – Calculando os módulos das derivadas segundas

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3 \right) \\&= \frac{\partial}{\partial x} (2x - y) \\&= 2\end{aligned}$$

$$|f_{xx}(x, y)| = 2$$

Exemplo 1 – Solução

$$f_{yy}(x, y)$$

Exemplo 1 – Solução

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3 \right)$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned} f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (-x + y) \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned} f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (-x + y) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3 \right) \\&= \frac{\partial}{\partial y} (-x + y) \\&= 1\end{aligned}$$

$$|f_{yy}(x, y)|$$

Exemplo 1 – Solução

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3 \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} (-x + y)$$

$$= 1$$

$$|f_{yy}(x, y)| = 1$$

Exemplo 1 – Solução

$$f_{xy}(x, y)$$

Exemplo 1 – Solução

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3 \right)$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (-x + y) \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3 \right) \\&= \frac{\partial}{\partial x} (-x + y) \\&= -1\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3 \right) \\&= \frac{\partial}{\partial x} (-x + y) \\&= -1\end{aligned}$$

$$|f_{xy}(x, y)|$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3 \right) \\&= \frac{\partial}{\partial x} (-x + y) \\&= -1\end{aligned}$$

$$|f_{xy}(x, y)| = 1$$

Exemplo 1 – Solução

Como o máximo das derivadas segundas em R é 2

Exemplo 1 – Solução

Como o máximo das derivadas segundas em R é 2
podemos escolher $M = 2$, portanto

Exemplo 1 – Solução

Como o máximo das derivadas segundas em R é 2
podemos escolher $M = 2$, portanto

$$|E(x, y)|$$

Exemplo 1 – Solução

Como o máximo das derivadas segundas em R é 2
podemos escolher $M = 2$, portanto

$$|E(x, y)| \leq \frac{M}{2} (|x - a| + |y - b|)^2$$

Exemplo 1 – Solução

Como o máximo das derivadas segundas em R é 2
podemos escolher $M = 2$, portanto

$$\begin{aligned}|E(x, y)| &\leq \frac{M}{2} (|x - a| + |y - b|)^2 \\ &= \frac{2}{2} (|x - 3| + |y - 2|)^2\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

Como o máximo das derivadas segundas em R é 2
podemos escolher $M = 2$, portanto

$$\begin{aligned}|E(x, y)| &\leq \frac{M}{2} (|x - a| + |y - b|)^2 \\&= \frac{2}{2} (|x - 3| + |y - 2|)^2 \\&= (|x - 3| + |y - 2|)^2\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

Como

$$|x - 3| \leq 0,1 \quad |y - 2| \leq 0,1$$

Exemplo 1 – Solução

Como

$$|x - 3| \leq 0,1 \quad |y - 2| \leq 0,1$$

$$|E(x, y)|$$

Exemplo 1 – Solução

Como

$$|x - 3| \leq 0,1 \quad |y - 2| \leq 0,1$$

$$|E(x, y)| \leq (|x - 3| + |y - 2|)^2$$

Exemplo 1 – Solução

Como

$$|x - 3| \leq 0,1 \quad |y - 2| \leq 0,1$$

$$\begin{aligned} |E(x, y)| &\leq (|x - 3| + |y - 2|)^2 \\ &\leq (0,1 + 0,1)^2 \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

Como

$$|x - 3| \leq 0,1 \quad |y - 2| \leq 0,1$$

$$\begin{aligned} |E(x, y)| &\leq (|x - 3| + |y - 2|)^2 \\ &\leq (0,1 + 0,1)^2 \\ &= (0,2)^2 \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

Como

$$|x - 3| \leq 0,1 \quad |y - 2| \leq 0,1$$

$$\begin{aligned} |E(x, y)| &\leq (|x - 3| + |y - 2|)^2 \\ &\leq (0,1 + 0,1)^2 \\ &= (0,2)^2 \\ &= 0,04 \end{aligned}$$

Conteúdo

Erro na Aproximação Linear

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 14.6

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 33-38

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações