

Diferenciais

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/pages/cfvv1>

Conteúdo

Variação em uma Direção

Diferenciais

Lista Mínima

Variação em uma Dimensão

Em uma dimensão podemos estimar a variação do valor da função em um ponto próximo à a usando a derivada em a

Variação em uma Dimensão

Em uma dimensão podemos estimar a variação do valor da função em um ponto próximo à a usando a derivada em a

$$df = f'(a)dx$$

Variação em uma Dimensão

Em uma dimensão podemos estimar a variação do valor da função em um ponto próximo à a usando a derivada em a

$$df = f'(a)dx$$

$$dx = x - a$$

Variação em uma Dimensão

Em uma dimensão podemos estimar a variação do valor da função em um ponto próximo à a usando a derivada em a

$$df = f'(a)dx$$

$$dx = x - a$$

$$df \approx f(x) - f(a)$$

Variação em Várias Dimensões

Em várias dimensões usamos a derivada direcional

Variação em Várias Dimensões

Em várias dimensões usamos a derivada direcional

$$df = (D_u f(a, b)) ds$$

Variação em Várias Dimensões

Em várias dimensões usamos a derivada direcional

$$df = (D_u f(a, b)) ds = (\nabla f(a, b) \cdot u) ds$$

Variação em Várias Dimensões

Em várias dimensões usamos a derivada direcional

$$df = (D_u f(a, b)) ds = (\nabla f(a, b) \cdot u) ds$$

$$ds = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

Variação em Várias Dimensões

Em várias dimensões usamos a derivada direcional

$$df = (D_u f(a, b)) ds = (\nabla f(a, b) \cdot u) ds$$

$$ds = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$df \approx f(x, y) - f(a, b)$$

Exemplo 1

Calcule quanto

$$f(x, y, z) = y \sin(x) + 2yz$$

irá variar se nos movermos 0,1 unidades a partir de $(0, 1, 0)$
na direção do ponto $(2, 2, -2)$

Exemplo 1 – Direção do movimento

Exemplo 1 – Direção do movimento

v

Exemplo 1 – Direção do movimento

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Direção do movimento

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Direção do movimento

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Exemplo 1 – Direção do movimento

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Normalizando o vetor

Exemplo 1 – Direção do movimento

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Normalizando o vetor

$\mathbf{u}$

Exemplo 1 – Direção do movimento

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Normalizando o vetor

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Exemplo 1 – Direção do movimento

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Normalizando o vetor

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}}$$

Exemplo 1 – Direção do movimento

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Normalizando o vetor

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{9}}$$

Exemplo 1 – Direção do movimento

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Normalizando o vetor

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

Exemplo 1 – Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

Exemplo 1 – Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (y \operatorname{sen}(x) + 2yz)$$

Exemplo 1 – Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (y \operatorname{sen}(x) + 2yz) = y \cos(x)$$

Exemplo 1 – Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (y \operatorname{sen}(x) + 2yz) = y \cos(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y \operatorname{sen}(x) + 2yz)$$

Exemplo 1 – Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (y \operatorname{sen}(x) + 2yz) = y \cos(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y \operatorname{sen}(x) + 2yz) = \operatorname{sen}(x) + 2z$$

Exemplo 1 – Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (y \operatorname{sen}(x) + 2yz) = y \cos(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y \operatorname{sen}(x) + 2yz) = \operatorname{sen}(x) + 2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (y \operatorname{sen}(x) + 2yz)$$

Exemplo 1 – Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (y \operatorname{sen}(x) + 2yz) = y \cos(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y \operatorname{sen}(x) + 2yz) = \operatorname{sen}(x) + 2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (y \operatorname{sen}(x) + 2yz) = 2y$$

Exemplo 1 – Gradiente de f

$$\nabla f$$

Exemplo 1 – Gradiente de f

$$\nabla f = (y \cos(x))\mathbf{i} + (\sin(x) + 2z)\mathbf{j} + (2y)\mathbf{k}$$

Exemplo 1 – Gradiente de f

$$\nabla f = (y \cos(x))\mathbf{i} + (\sin(x) + 2z)\mathbf{j} + (2y)\mathbf{k} = \begin{pmatrix} y \cos(x) \\ \sin(x) + 2z \\ 2y \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Gradiente de f

$$\nabla f = (y \cos(x))\mathbf{i} + (\sin(x) + 2z)\mathbf{j} + (2y)\mathbf{k} = \begin{pmatrix} y \cos(x) \\ \sin(x) + 2z \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(0, 1, 0)$$

Exemplo 1 – Gradiente de f

$$\nabla f = (y \cos(x))\mathbf{i} + (\sin(x) + 2z)\mathbf{j} + (2y)\mathbf{k} = \begin{pmatrix} y \cos(x) \\ \sin(x) + 2z \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(0, 1, 0) = (1 \cos(0))\mathbf{i} + (\sin(0) + 2 \times 0)\mathbf{j} + (2 \times 1)\mathbf{k}$$

Exemplo 1 – Gradiente de f

$$\nabla f = (y \cos(x))\mathbf{i} + (\sin(x) + 2z)\mathbf{j} + (2y)\mathbf{k} = \begin{pmatrix} y \cos(x) \\ \sin(x) + 2z \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(0, 1, 0) = (1 \cos(0))\mathbf{i} + (\sin(0) + 2 \times 0)\mathbf{j} + (2 \times 1)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$$

Exemplo 1 – Gradiente de f

$$\nabla f = (y \cos(x))\mathbf{i} + (\sin(x) + 2z)\mathbf{j} + (2y)\mathbf{k} = \begin{pmatrix} y \cos(x) \\ \sin(x) + 2z \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(0, 1, 0) = (1 \cos(0))\mathbf{i} + (\sin(0) + 2 \times 0)\mathbf{j} + (2 \times 1)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Derivada direcional

$$D_u f(0, 1, 0)$$

Exemplo 1 – Derivada direcional

$$D_u f(0, 1, 0) = \nabla f(0, 1, 0) \cdot u$$

Exemplo 1 – Derivada direcional

$$\begin{aligned} D_u f(0, 1, 0) &= \nabla f(0, 1, 0) \cdot u \\ &= (\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right) \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Derivada direcional

$$\begin{aligned}D_u f(0, 1, 0) &= \nabla f(0, 1, 0) \cdot u \\&= (\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right) \\&= 1 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \left(-\frac{2}{3} \right)\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Derivada direcional

$$\begin{aligned}D_u f(0, 1, 0) &= \nabla f(0, 1, 0) \cdot u \\&= (\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right) \\&= 1 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \left(-\frac{2}{3} \right) \\&= \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Derivada direcional

$$\begin{aligned}D_u f(0, 1, 0) &= \nabla f(0, 1, 0) \cdot u \\&= (\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right) \\&= 1 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \left(-\frac{2}{3} \right) \\&= \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Variação

Exemplo 1 – Variação

$$df$$

Exemplo 1 – Variação

$$df = D_u f(0, 1, 0) ds$$

Exemplo 1 – Variação

$$df = D_u f(0, 1, 0) ds$$

$$= -\frac{2}{3} \times 0,1$$

Exemplo 1 – Variação

$$df = D_u f(0, 1, 0) ds$$

$$= -\frac{2}{3} \times 0,1 = -\frac{2}{3} \frac{1}{10}$$

Exemplo 1 – Variação

$$df = D_u f(0, 1, 0) ds$$

$$= -\frac{2}{3} \times 0,1 = -\frac{2}{3} \frac{1}{10} = -\frac{2}{30}$$

Exemplo 1 – Variação

$$df = D_u f(0, 1, 0) ds$$

$$= -\frac{2}{3} \times 0,1 = -\frac{2}{3} \frac{1}{10} = -\frac{2}{30} = -\frac{1}{15}$$

Exemplo 1 – Variação

$$df = D_u f(0, 1, 0) ds$$

$$= -\frac{2}{3} \times 0,1 = -\frac{2}{3} \frac{1}{10} = -\frac{2}{30} = -\frac{1}{15}$$

$$\approx -0,067$$

Conteúdo

Variação em uma Direção

Diferenciais

Lista Mínima

Diferencial em Uma Dimensão

Quando x varia de a para $a + \Delta x$

Diferencial em Uma Dimensão

Quando x varia de a para $a + \Delta x$

A variação da função f é $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$

Diferencial em Uma Dimensão

Quando x varia de a para $a + \Delta x$

A variação da função f é $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$

A diferencial de f é $df = f'(a)\Delta x$

Diferencial em Uma Dimensão

Quando x varia de a para $a + dx$

A variação da função f é $\Delta f = f(a + dx) - f(a)$

A diferencial de f é $df = f'(a)dx$

Diferencial em Duas Dimensão

Quando (x, y) varia de (a, b) para $(a + dx, b + dy)$

Diferencial em Duas Dimensão

Quando (x, y) varia de (a, b) para $(a + dx, b + dy)$

A variação da função f é $\Delta f = f(a + dx, b + dy) - f(a, b)$

Diferencial em Duas Dimensão

Quando (x, y) varia de (a, b) para $(a + dx, b + dy)$

A variação da função f é $\Delta f = f(a + dx, b + dy) - f(a, b)$

A diferencial de f é $df = f_x(a, b)dx + f_y(a, b)dy$

Diferencial em Duas Dimensão

Quando (x, y) varia de (a, b) para $(a + dx, b + dy)$

A variação da função f é $\Delta f = f(a + dx, b + dy) - f(a, b)$

A diferencial de f é $df = f_x(a, b)dx + f_y(a, b)dy$

As diferenciais dx e dy são variáveis independentes

$$dx = x - a \quad dy = y - b$$

Definição

Se movemos de (a, b) para um ponto próximo $(a + dx, b + dy)$

Definição

Se movemos de (a, b) para um ponto próximo $(a + dx, b + dy)$

A Diferencial Total de f é

$$df = f_x(a, b) dx + f_y(a, b) dy$$

Exemplo 2

Uma lata de formato cilíndrico foi projetada para ter um raio de 1 pol. e uma altura de 5 pol., mas o raio tem um erro de $dr = 0,03$ e a altura tem um erro de $dh = -0,1$.

Qual a variação resultante no volume da lata?

Exemplo 2 – Variação exata

$$\Delta V$$

Exemplo 2 – Variação exata

$$\Delta V = V(r_0 + dr, h_0 + dh) - V(r_0, h_0)$$

Exemplo 2 – Variação exata

$$\begin{aligned}\Delta V &= V(r_0 + dr, h_0 + dh) - V(r_0, h_0) \\ &= V(1 + 0,03, 5 - 0,1) - V(1, 5)\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Variação exata

$$\begin{aligned}\Delta V &= V(r_0 + dr, h_0 + dh) - V(r_0, h_0) \\ &= V(1 + 0,03, 5 - 0,1) - V(1, 5) \\ &= V(1,03, 4,9) - V(1, 5)\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Variação exata

$$\begin{aligned}\Delta V &= V(r_0 + dr, h_0 + dh) - V(r_0, h_0) \\ &= V(1 + 0,03, 5 - 0,1) - V(1, 5) \\ &= V(1,03, 4,9) - V(1, 5) \\ &= \pi(1,03)^2 \times 4,9 - \pi 1^2 \times 5\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Variação exata

$$\begin{aligned}\Delta V &= V(r_0 + dr, h_0 + dh) - V(r_0, h_0) \\&= V(1 + 0,03, 5 - 0,1) - V(1, 5) \\&= V(1,03, 4,9) - V(1, 5) \\&= \pi(1,03)^2 \times 4,9 - \pi 1^2 \times 5 \\&= 16,3313 - 15,7080\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Variação exata

$$\begin{aligned}\Delta V &= V(r_0 + dr, h_0 + dh) - V(r_0, h_0) \\&= V(1 + 0,03, 5 - 0,1) - V(1, 5) \\&= V(1,03, 4,9) - V(1, 5) \\&= \pi(1,03)^2 \times 4,9 - \pi 1^2 \times 5 \\&= 16,3313 - 15,7080 \\&= 0,6233\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Variação usando o diferencial

$$\Delta V$$

Exemplo 2 – Variação usando o diferencial

$$\Delta V \approx dV = V_r(r_0, h_0)dr + V_h(r_0, h_0)dh$$

Exemplo 2 – Variação usando o diferencial

$$\Delta V \approx dV = V_r(r_0, h_0)dr + V_h(r_0, h_0)dh$$

$$= (2\pi rh) \Big|_{(r_0, h_0)} dr + (\pi r^2) \Big|_{(r_0, h_0)} dh$$

Exemplo 2 – Variação usando o diferencial

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx dV = V_r(r_0, h_0)dr + V_h(r_0, h_0)dh \\&= (2\pi rh) \bigg|_{(r_0, h_0)} dr + (\pi r^2) \bigg|_{(r_0, h_0)} dh \\&= (2\pi rh) \bigg|_{(1,5)} (0,03) + (\pi r^2) \bigg|_{(1,5)} (-0,1)\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Variação usando o diferencial

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx dV = V_r(r_0, h_0)dr + V_h(r_0, h_0)dh \\&= (2\pi rh) \Big|_{(r_0, h_0)} dr + (\pi r^2) \Big|_{(r_0, h_0)} dh \\&= (2\pi rh) \Big|_{(1,5)} (0,03) + (\pi r^2) \Big|_{(1,5)} (-0,1) \\&= (2\pi 1 \times 5) (0,03) - (\pi 1^2) (0,1)\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Variação usando o diferencial

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx dV = V_r(r_0, h_0)dr + V_h(r_0, h_0)dh \\&= (2\pi rh) \Big|_{(r_0, h_0)} dr + (\pi r^2) \Big|_{(r_0, h_0)} dh \\&= (2\pi rh) \Big|_{(1,5)} (0,03) + (\pi r^2) \Big|_{(1,5)} (-0,1) \\&= (2\pi 1 \times 5) (0,03) - (\pi 1^2) (0,1) \\&= 0,3\pi - 0,1\pi\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Variação usando o diferencial

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx dV = V_r(r_0, h_0)dr + V_h(r_0, h_0)dh \\&= (2\pi rh) \Big|_{(r_0, h_0)} dr + (\pi r^2) \Big|_{(r_0, h_0)} dh \\&= (2\pi rh) \Big|_{(1,5)} (0,03) + (\pi r^2) \Big|_{(1,5)} (-0,1) \\&= (2\pi 1 \times 5) (0,03) - (\pi 1^2) (0,1) \\&= 0,3\pi - 0,1\pi \\&= 0,2\pi\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Variação usando o diferencial

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx dV = V_r(r_0, h_0)dr + V_h(r_0, h_0)dh \\&= (2\pi rh) \Big|_{(r_0, h_0)} dr + (\pi r^2) \Big|_{(r_0, h_0)} dh \\&= (2\pi rh) \Big|_{(1,5)} (0,03) + (\pi r^2) \Big|_{(1,5)} (-0,1) \\&= (2\pi 1 \times 5) (0,03) - (\pi 1^2) (0,1) \\&= 0,3\pi - 0,1\pi \\&= 0,2\pi \\&\approx 0,6283\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Variação usando o diferencial

$$\Delta V \approx dV = V_r(r_0, h_0)dr + V_h(r_0, h_0)dh$$

$$= (2\pi rh) \Big|_{(r_0, h_0)} dr + (\pi r^2) \Big|_{(r_0, h_0)} dh$$

$$= (2\pi rh) \Big|_{(1,5)} (0,03) + (\pi r^2) \Big|_{(1,5)} (-0,1)$$

$$= (2\pi 1 \times 5) (0,03) - (\pi 1^2) (0,1)$$

$$= 0,3\pi - 0,1\pi$$

$$= 0,2\pi$$

$$\approx 0,6283$$

$$\Delta V = 0,6233$$

Conteúdo

Variação em uma Direção

Diferenciais

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 14.6

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 19-24

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações