

# Multiplicadores de Lagrange

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/pages/cfvv1>

# Conteúdo

Extremos Condicionados

Extremos Locais Restritos a uma Curva

Multiplicadores de Lagrange

Exemplos

Funções Crescentes

Exemplos

Lista Mínima

# Extremos Condicionados

Encontre o máximo (mínimo) da função  $f(x, y, z)$   
sujeito a  $g(x, y, z) = 0$

# Extremos Condicionados

Encontre o máximo (mínimo) da função  $f(x, y, z)$

sujeito a  $g(x, y, z) = 0$

$f$  função objetivo

# Extremos Condicionados

Encontre o máximo (mínimo) da função  $f(x, y, z)$

sujeito a  $g(x, y, z) = 0$

$f$  função objetivo

$g$  restrição

# Conteúdo

Extremos Condicionados

**Extremos Locais Restritos a uma Curva**

Multiplicadores de Lagrange

Exemplos

Funções Crescentes

Exemplos

Lista Mínima

# Teorema do Gradiente Ortogonal

Seja  $f(x, y, z)$  uma função diferenciável em uma região

# Teorema do Gradiente Ortogonal

Seja  $f(x, y, z)$  uma função diferenciável em uma região cujo interior contém a curva

$C$ :

# Teorema do Gradiente Ortogonal

Seja  $f(x, y, z)$  uma função diferenciável em uma região cujo interior contém a curva

$$C: \mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$$

# Teorema do Gradiente Ortogonal

Seja  $f(x, y, z)$  uma função diferenciável em uma região cujo interior contém a curva

$$C: \mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k} = \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \\ k(t) \end{pmatrix}$$

# Teorema do Gradiente Ortogonal

Seja  $f(x, y, z)$  uma função diferenciável em uma região cujo interior contém a curva

$$C: \mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k} = \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \\ k(t) \end{pmatrix}$$

Se  $P_0$  é um ponto em  $C$  onde  $f$  possua um máximo ou mínimo local relativo aos seus valores em  $C$ ,

# Teorema do Gradiente Ortogonal

Seja  $f(x, y, z)$  uma função diferenciável em uma região cujo interior contém a curva

$$C: \mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k} = \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \\ k(t) \end{pmatrix}$$

Se  $P_0$  é um ponto em  $C$  onde  $f$  possua um máximo ou mínimo local relativo aos seus valores em  $C$ , então  $\nabla f$  é normal a  $C$  em  $P_0$

# Demonstração

Os valores de  $f$ , restrita a  $C$ , são dados pela função

# Demonstração

Os valores de  $f$ , restrita a  $C$ , são dados pela função

$$p(t) = f(g(t), h(t), k(t))$$

# Demonstração

Os valores de  $f$ , restrita a  $C$ , são dados pela função

$$p(t) = f(g(t), h(t), k(t))$$

$$\frac{dp}{dt}$$

# Demonstração

Os valores de  $f$ , restrita a  $C$ , são dados pela função

$$p(t) = f(g(t), h(t), k(t))$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial f}{\partial g} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{dk}{dt}$$

# Demonstração

Os valores de  $f$ , restrita a  $C$ , são dados pela função

$$p(t) = f(g(t), h(t), k(t))$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial f}{\partial g} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{dk}{dt} = \nabla f \cdot \frac{dr}{dt}$$

# Demonstração

Os valores de  $f$ , restrita a  $C$ , são dados pela função

$$p(t) = f(g(t), h(t), k(t))$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial f}{\partial g} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{dk}{dt} = \nabla f \cdot \frac{dr}{dt}$$

Se  $f$ , restrita a  $C$ , possui extremo local em  $(a, b, c) = (g(t_0), h(t_0), k(t_0))$

# Demonstração

Os valores de  $f$ , restrita a  $C$ , são dados pela função

$$p(t) = f(g(t), h(t), k(t))$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial f}{\partial g} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{dk}{dt} = \nabla f \cdot \frac{dr}{dt}$$

Se  $f$ , restrita a  $C$ , possui extremo local em  $(a, b, c) = (g(t_0), h(t_0), k(t_0))$

$$\text{então } \frac{dp}{dt}(t_0) = 0$$

# Demonstração

Os valores de  $f$ , restrita a  $C$ , são dados pela função

$$p(t) = f(g(t), h(t), k(t))$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial f}{\partial g} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{dk}{dt} = \nabla f \cdot \frac{dr}{dt}$$

Se  $f$ , restrita a  $C$ , possui extremo local em  $(a, b, c) = (g(t_0), h(t_0), k(t_0))$

$$\text{então } \frac{dp}{dt}(t_0) = 0 \quad \text{portanto} \quad \nabla f(a, b, c) \cdot \frac{dr}{dt}(t_0) = 0$$

# Conteúdo

Extremos Condicionados

Extremos Locais Restritos a uma Curva

**Multiplicadores de Lagrange**

Exemplos

Funções Crescentes

Exemplos

Lista Mínima

# Introdução

Para encontrar o máximo (mínimo) da função  $f(x, y, z)$   
sujeito a  $g(x, y, z) = 0$

# Introdução

Para encontrar o máximo (mínimo) da função  $f(x, y, z)$   
sujeito a  $g(x, y, z) = 0$

Buscamos pelos pontos onde o gradiente de  $f$   
é normal a curva de nível de  $g(x, y, z) = 0$

# Introdução

Para encontrar o máximo (mínimo) da função  $f(x, y, z)$   
sujeito a  $g(x, y, z) = 0$

Buscamos pelos pontos onde o gradiente de  $f$   
é normal a curva de nível de  $g(x, y, z) = 0$

Isto é, os pontos onde os gradientes de  $f$  e  $g$  apontam na mesma direção

# Introdução

Para encontrar o máximo (mínimo) da função  $f(x, y, z)$   
sujeito a  $g(x, y, z) = 0$

Buscamos pelos pontos onde o gradiente de  $f$   
é normal a curva de nível de  $g(x, y, z) = 0$

Isto é, os pontos onde os gradientes de  $f$  e  $g$  apontam na mesma direção

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

# Introdução

Para encontrar o máximo (mínimo) da função  $f(x, y, z)$   
sujeito a  $g(x, y, z) = 0$

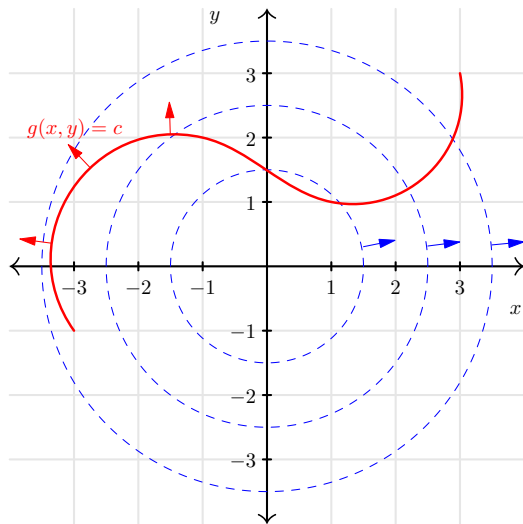
Buscamos pelos pontos onde o gradiente de  $f$   
é normal a curva de nível de  $g(x, y, z) = 0$

Isto é, os pontos onde os gradientes de  $f$  e  $g$  apontam na mesma direção

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$\lambda$  é o Multiplicador de Lagrange

# Extremos Condicionados



# Método dos Multiplicadores de Lagrange

Suponha que  $f(x, y, z)$  e  $g(x, y, z)$  sejam diferenciáveis  
e  $\nabla g \neq 0$  quando  $g(x, y, z) = 0$

# Método dos Multiplicadores de Lagrange

Suponha que  $f(x, y, z)$  e  $g(x, y, z)$  sejam diferenciáveis  
e  $\nabla g \neq 0$  quando  $g(x, y, z) = 0$

Para encontrar os valores extremos locais de  $f(x, y, z)$

# Método dos Multiplicadores de Lagrange

Suponha que  $f(x, y, z)$  e  $g(x, y, z)$  sejam diferenciáveis  
e  $\nabla g \neq 0$  quando  $g(x, y, z) = 0$

Para encontrar os valores extremos locais de  $f(x, y, z)$   
sujeito a restrição  $g(x, y, z) = 0$

# Método dos Multiplicadores de Lagrange

Suponha que  $f(x, y, z)$  e  $g(x, y, z)$  sejam diferenciáveis  
e  $\nabla g \neq 0$  quando  $g(x, y, z) = 0$

Para encontrar os valores extremos locais de  $f(x, y, z)$   
sujeito a restrição  $g(x, y, z) = 0$   
encontre  $x, y, z$  e  $\lambda$  tais que

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

# Conteúdo

Extremos Condicionados

Extremos Locais Restritos a uma Curva

Multiplicadores de Lagrange

**Exemplos**

Funções Crescentes

Exemplos

Lista Mínima

# Exemplo 1

Encontre o maior e menor valores que a função

$$f(x, y) = xy$$

assume na elipse

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

# Exemplo 1 – Interpretando o Problema

Queremos encontrar os valores extremos da função

$$f(x, y) = xy$$

# Exemplo 1 – Interpretando o Problema

Queremos encontrar os valores extremos da função

$$f(x, y) = xy$$

sujeito a restrição

$$g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$

# Exemplo 1 – Interpretando o Problema

Queremos encontrar os valores extremos da função

$$f(x, y) = xy$$

sujeito a restrição

$$g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$

Para isso precisamos encontrar os valores  $x$ ,  $y$  e  $\lambda$  tais que

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad g(x, y) = 0$$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy)$$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y$$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy)$$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy) = x$$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy) = x$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy) = x$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy) = x$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x}$$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy) = x$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right)$$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy) = x$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right) = \frac{2x}{8}$$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy) = x$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right) = \frac{2x}{8} = \frac{x}{4}$$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy) = x$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right) = \frac{2x}{8} = \frac{x}{4}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}$$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy) = x$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right) = \frac{2x}{8} = \frac{x}{4}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right)$$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy) = x$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right) = \frac{2x}{8} = \frac{x}{4}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right) = \frac{2y}{2}$$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy) = x$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right) = \frac{2x}{8} = \frac{x}{4}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right) = \frac{2y}{2} = y$$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy) = x$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right) = \frac{2x}{8} = \frac{x}{4}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right) = \frac{2y}{2} = y$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{x}{4} \\ y \end{pmatrix}$$

# Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy) = x$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right) = \frac{2x}{8} = \frac{x}{4}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right) = \frac{2y}{2} = y$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{x}{4} \\ y \end{pmatrix}$$

# Exemplo 1 – Sistema

A equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

# Exemplo 1 – Sistema

A equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

se torna

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{x}{4} \\ y \end{pmatrix}$$

# Exemplo 1 – Sistema

A equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

se torna

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{x}{4} \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$$

# Exemplo 1 – Sistema

A equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

se torna

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{x}{4} \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$$

A equação

$$g(x, y) = 0$$

# Exemplo 1 – Sistema

A equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

se torna

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{x}{4} \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$$

A equação

$$g(x, y) = 0$$

se torna

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$

# Exemplo 1 – Sistema

A equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

se torna

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{x}{4} \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$$

A equação

$$g(x, y) = 0$$

se torna

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

# Exemplo 1 – Sistema

A equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

se torna

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{x}{4} \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$$

A equação

$$g(x, y) = 0$$

se torna

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

# Exemplo 1 – Sistema

A equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

se torna

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{x}{4} \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$$

A equação

$$g(x, y) = 0$$

se torna

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

# Exemplo 1 – Resolvendo o Sistema Não-Linear

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$$

# Exemplo 1 – Resolvendo o Sistema Não-Linear

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$$

Substituindo  $x = \lambda y$  em  $4y = \lambda x$

# Exemplo 1 – Resolvendo o Sistema Não-Linear

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$$

Substituindo  $x = \lambda y$  em  $4y = \lambda x$

$$4y = \lambda x$$

# Exemplo 1 – Resolvendo o Sistema Não-Linear

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$$

Substituindo  $x = \lambda y$  em  $4y = \lambda x$

$$4y = \lambda x = \lambda \lambda y$$

# Exemplo 1 – Resolvendo o Sistema Não-Linear

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$$

Substituindo  $x = \lambda y$  em  $4y = \lambda x$

$$4y = \lambda x = \lambda \lambda y$$

$$4y = \lambda^2 y$$

# Exemplo 1 – Resolvendo o Sistema Não-Linear

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$$

Substituindo  $x = \lambda y$  em  $4y = \lambda x$

$$4y = \lambda x = \lambda \lambda y$$

$$4y = \lambda^2 y \quad \text{Não divida por } y!$$

# Exemplo 1 – Resolvendo o Sistema Não-Linear

Precisamos resolver o sistema

Assim  $y = 0$

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$$

Substituindo  $x = \lambda y$  em  $4y = \lambda x$

$$4y = \lambda x = \lambda \lambda y$$

$$4y = \lambda^2 y \quad \text{Não divida por } y!$$

# Exemplo 1 – Resolvendo o Sistema Não-Linear

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$$

Assim  $y = 0$  ou

$$y \neq 0 \quad \text{e} \quad \lambda^2 = 4$$

Substituindo  $x = \lambda y$  em  $4y = \lambda x$

$$4y = \lambda x = \lambda \lambda y$$

$$4y = \lambda^2 y \quad \text{Não divida por } y!$$

# Exemplo 1 – Resolvendo o Sistema Não-Linear

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$$

Assim  $y = 0$  ou

$$y \neq 0 \quad \text{e} \quad \lambda^2 = 4$$

$$|\lambda| = 2$$

Substituindo  $x = \lambda y$  em  $4y = \lambda x$

$$4y = \lambda x = \lambda \lambda y$$

$$4y = \lambda^2 y \quad \text{Não divida por } y!$$

# Exemplo 1 – Resolvendo o Sistema Não-Linear

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$$

Substituindo  $x = \lambda y$  em  $4y = \lambda x$

$$4y = \lambda x = \lambda \lambda y$$

$$4y = \lambda^2 y \quad \text{Não divida por } y!$$

Assim  $y = 0$  ou

$$y \neq 0 \quad \text{e} \quad \lambda^2 = 4$$

$$|\lambda| = 2$$

$$\lambda = \pm 2$$

# Exemplo 1 – Resolvendo o Sistema Não-Linear

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$$

Substituindo  $x = \lambda y$  em  $4y = \lambda x$

$$4y = \lambda x = \lambda \lambda y$$

$$4y = \lambda^2 y \quad \text{Não divida por } y!$$

Assim  $y = 0$  ou

$$y \neq 0 \quad \text{e} \quad \lambda^2 = 4$$

$$|\lambda| = 2$$

$$\lambda = \pm 2$$

Caso 1:  $y = 0$

# Exemplo 1 – Resolvendo o Sistema Não-Linear

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$$

Substituindo  $x = \lambda y$  em  $4y = \lambda x$

$$4y = \lambda x = \lambda \lambda y$$

$$4y = \lambda^2 y \quad \text{Não divida por } y!$$

Assim  $y = 0$  ou

$$y \neq 0 \quad \text{e} \quad \lambda^2 = 4$$

$$|\lambda| = 2$$

$$\lambda = \pm 2$$

Caso 1:  $y = 0$

Caso 2:  $y \neq 0$  e  $\lambda = 2$

# Exemplo 1 – Resolvendo o Sistema Não-Linear

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$$

Substituindo  $x = \lambda y$  em  $4y = \lambda x$

$$4y = \lambda x = \lambda \lambda y$$

$$4y = \lambda^2 y \quad \text{Não divida por } y!$$

Assim  $y = 0$  ou

$$y \neq 0 \quad \text{e} \quad \lambda^2 = 4$$

$$|\lambda| = 2$$

$$\lambda = \pm 2$$

Caso 1:  $y = 0$

Caso 2:  $y \neq 0$  e  $\lambda = 2$

Caso 3:  $y \neq 0$  e  $\lambda = -2$

# Exemplo 1 – Caso 1

$$y = 0$$

# Exemplo 1 – Caso 1

$$y = 0$$

$$x = \lambda y$$

# Exemplo 1 – Caso 1

$$y = 0$$

$$x = \lambda y = 0$$

# Exemplo 1 – Caso 1

$$y = 0$$

$$x = \lambda y = 0$$

$$x^2 + 4y^2$$

# Exemplo 1 – Caso 1

$$y = 0$$

$$x = \lambda y = 0$$

$$x^2 + 4y^2 = 0$$

# Exemplo 1 – Caso 1

$$y = 0$$

$$x = \lambda y = 0$$

$$x^2 + 4y^2 = 0 \neq 8$$

## Exemplo 1 – Caso 1

$$y = 0$$

$$x = \lambda y = 0$$

$$x^2 + 4y^2 = 0 \neq 8$$

Não resolve o sistema

## Exemplo 1 – Caso 1

$$y = 0$$

$$x = \lambda y = 0$$

$$x^2 + 4y^2 = 0 \neq 8$$

Não resolve o sistema

Portanto  $y \neq 0$

## Exemplo 1 – Caso 2

$$y \neq 0 \quad \lambda = 2$$

## Exemplo 1 – Caso 2

$$y \neq 0 \quad \lambda = 2$$

$$x = \lambda y$$

## Exemplo 1 – Caso 2

$$y \neq 0 \quad \lambda = 2$$

$$x = \lambda y$$

$$= 2y$$

## Exemplo 1 – Caso 2

$$y \neq 0 \quad \lambda = 2 \qquad x^2 + 4y^2 = 8$$

$$x = \lambda y$$

$$= 2y$$

## Exemplo 1 – Caso 2

$$y \neq 0 \quad \lambda = 2 \qquad x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$x = \lambda y$$

$$= 2y$$

## Exemplo 1 – Caso 2

$$y \neq 0 \quad \lambda = 2 \qquad x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$x = \lambda y \qquad 4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$= 2y$$

## Exemplo 1 – Caso 2

$$y \neq 0 \quad \lambda = 2 \qquad x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$x = \lambda y \qquad 4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$= 2y \qquad 8y^2 = 8$$

## Exemplo 1 – Caso 2

$$y \neq 0 \quad \lambda = 2 \qquad x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$x = \lambda y \qquad 4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$= 2y \qquad 8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

## Exemplo 1 – Caso 2

$$\begin{aligned}y \neq 0 \quad \lambda &= 2 & x^2 + 4y^2 &= 8 \\ & & (2x)^2 + 4y^2 &= 8 \\ x &= \lambda y & 4y^2 + 4y^2 &= 8 \\ &= 2y & 8y^2 &= 8 \\ & & y^2 &= 1 \\ & & y &= \pm 1\end{aligned}$$

## Exemplo 1 – Caso 2

$$y \neq 0 \quad \lambda = 2$$

$$x = \lambda y$$

$$= 2y$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$\text{Se } y = 1$$

## Exemplo 1 – Caso 2

$$y \neq 0 \quad \lambda = 2$$

$$x = \lambda y$$

$$= 2y$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$\text{Se } y = 1$$

$$x = 2y$$

## Exemplo 1 – Caso 2

$$y \neq 0 \quad \lambda = 2$$

$$x = \lambda y$$

$$= 2y$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$\text{Se } y = 1$$

$$x = 2y = 2$$

## Exemplo 1 – Caso 2

$$y \neq 0 \quad \lambda = 2$$

$$x = \lambda y$$

$$= 2y$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$\text{Se } y = 1$$

$$x = 2y = 2$$

$$P_1 = (2, 1)$$

## Exemplo 1 – Caso 2

$$y \neq 0 \quad \lambda = 2$$

$$x = \lambda y$$

$$= 2y$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$\text{Se } y = 1$$

$$x = 2y = 2$$

$$P_1 = (2, 1)$$

$$\text{Se } y = -1$$

## Exemplo 1 – Caso 2

$$y \neq 0 \quad \lambda = 2$$

$$x = \lambda y$$

$$= 2y$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$\text{Se } y = 1$$

$$x = 2y = 2$$

$$P_1 = (2, 1)$$

$$\text{Se } y = -1$$

$$x = 2y$$

## Exemplo 1 – Caso 2

$$y \neq 0 \quad \lambda = 2$$

$$x = \lambda y$$

$$= 2y$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$\text{Se } y = 1$$

$$x = 2y = 2$$

$$P_1 = (2, 1)$$

$$\text{Se } y = -1$$

$$x = 2y = -2$$

## Exemplo 1 – Caso 2

$$y \neq 0 \quad \lambda = 2$$

$$x = \lambda y$$

$$= 2y$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$\text{Se } y = 1$$

$$x = 2y = 2$$

$$P_1 = (2, 1)$$

$$\text{Se } y = -1$$

$$x = 2y = -2$$

$$P_2 = (-2, 1)$$

## Exemplo 1 – Caso 3

$$y \neq 0 \quad \lambda = -2$$

## Exemplo 1 – Caso 3

$$y \neq 0 \quad \lambda = -2$$

$$x = \lambda y$$

## Exemplo 1 – Caso 3

$$y \neq 0 \quad \lambda = -2$$

$$x = \lambda y$$

$$= -2y$$

## Exemplo 1 – Caso 3

$$y \neq 0 \quad \lambda = -2 \qquad x^2 + 4y^2 = 8$$

$$x = \lambda y$$

$$= -2y$$

## Exemplo 1 – Caso 3

$$y \neq 0 \quad \lambda = -2 \qquad x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(-2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$x = \lambda y$$

$$= -2y$$

## Exemplo 1 – Caso 3

$$y \neq 0 \quad \lambda = -2 \qquad x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(-2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$x = \lambda y \qquad 4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$= -2y$$

## Exemplo 1 – Caso 3

$$y \neq 0 \quad \lambda = -2 \qquad x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(-2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$x = \lambda y \qquad 4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$= -2y \qquad 8y^2 = 8$$

## Exemplo 1 – Caso 3

$$y \neq 0 \quad \lambda = -2 \qquad x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(-2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$x = \lambda y \qquad 4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$= -2y \qquad 8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

## Exemplo 1 – Caso 3

$$y \neq 0 \quad \lambda = -2 \qquad x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(-2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$x = \lambda y \qquad 4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$= -2y \qquad 8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

## Exemplo 1 – Caso 3

$$y \neq 0 \quad \lambda = -2$$

$$x = \lambda y$$

$$= -2y$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(-2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$\text{Se } y = 1$$

## Exemplo 1 – Caso 3

$$y \neq 0 \quad \lambda = -2$$

$$x = \lambda y$$

$$= -2y$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(-2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$\text{Se } y = 1$$

$$x = -2y$$

## Exemplo 1 – Caso 3

$$y \neq 0 \quad \lambda = -2$$

$$x = \lambda y$$

$$= -2y$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(-2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$\text{Se } y = 1$$

$$x = -2y = -2$$

## Exemplo 1 – Caso 3

$$y \neq 0 \quad \lambda = -2$$

$$x = \lambda y$$

$$= -2y$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(-2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$\text{Se } y = 1$$

$$x = -2y = -2$$

$$P_3 = (-2, 1)$$

## Exemplo 1 – Caso 3

$$y \neq 0 \quad \lambda = -2$$

$$x = \lambda y$$

$$= -2y$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(-2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$\text{Se } y = 1$$

$$x = -2y = -2$$

$$P_3 = (-2, 1)$$

$$\text{Se } y = -1$$

## Exemplo 1 – Caso 3

$$y \neq 0 \quad \lambda = -2$$

$$x = \lambda y$$

$$= -2y$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(-2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$\text{Se } y = 1$$

$$x = -2y = -2$$

$$P_3 = (-2, 1)$$

$$\text{Se } y = -1$$

$$x = -2y$$

## Exemplo 1 – Caso 3

$$y \neq 0 \quad \lambda = -2$$

$$x = \lambda y$$

$$= -2y$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(-2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$\text{Se } y = 1$$

$$x = -2y = -2$$

$$P_3 = (-2, 1)$$

$$\text{Se } y = -1$$

$$x = -2y = 2$$

## Exemplo 1 – Caso 3

$$y \neq 0 \quad \lambda = -2$$

$$x = \lambda y$$

$$= -2y$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

$$(-2x)^2 + 4y^2 = 8$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$8y^2 = 8$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$\text{Se } y = 1$$

$$x = -2y = -2$$

$$P_3 = (-2, 1)$$

$$\text{Se } y = -1$$

$$x = -2y = 2$$

$$P_4 = (2, -1)$$

# Exemplo 1 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = xy$  nos pontos

# Exemplo 1 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = xy$  nos pontos

$$f(-2, -1)$$

# Exemplo 1 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = xy$  nos pontos

$$f(-2, -1) = (-2)(-1)$$

# Exemplo 1 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = xy$  nos pontos

$$f(-2, -1) = (-2)(-1) = 2$$

# Exemplo 1 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = xy$  nos pontos

$$f(-2, -1) = (-2)(-1) = 2$$

$$f(2, -1)$$

# Exemplo 1 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = xy$  nos pontos

$$f(-2, -1) = (-2)(-1) = 2$$

$$f(2, -1) = 2(-1)$$

# Exemplo 1 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = xy$  nos pontos

$$f(-2, -1) = (-2)(-1) = 2$$

$$f(2, -1) = 2(-1) = -2$$

# Exemplo 1 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = xy$  nos pontos

$$f(-2, -1) = (-2)(-1) = 2$$

$$f(2, -1) = 2(-1) = -2$$

$$f(-2, 1)$$

# Exemplo 1 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = xy$  nos pontos

$$f(-2, -1) = (-2)(-1) = 2$$

$$f(2, -1) = 2(-1) = -2$$

$$f(-2, 1) = -2 \times 1$$

# Exemplo 1 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = xy$  nos pontos

$$f(-2, -1) = (-2)(-1) = 2$$

$$f(2, -1) = 2(-1) = -2$$

$$f(-2, 1) = -2 \times 1 = -2$$

# Exemplo 1 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = xy$  nos pontos

$$f(-2, -1) = (-2)(-1) = 2$$

$$f(2, -1) = 2(-1) = -2$$

$$f(-2, 1) = -2 \times 1 = -2$$

$$f(2, 1)$$

# Exemplo 1 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = xy$  nos pontos

$$f(-2, -1) = (-2)(-1) = 2$$

$$f(2, -1) = 2(-1) = -2$$

$$f(-2, 1) = -2 \times 1 = -2$$

$$f(2, 1) = 2 \times 1$$

## Exemplo 1 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = xy$  nos pontos

$$f(-2, -1) = (-2)(-1) = 2$$

$$f(2, -1) = 2(-1) = -2$$

$$f(-2, 1) = -2 \times 1 = -2$$

$$f(2, 1) = 2 \times 1 = 2$$

# Exemplo 1 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = xy$  nos pontos

$$f(-2, -1) = (-2)(-1) = 2$$

$$f(2, -1) = 2(-1) = -2$$

$$f(-2, 1) = -2 \times 1 = -2$$

$$f(2, 1) = 2 \times 1 = 2$$

O valor máximo de  $f$  é 2 e ocorre nos pontos  $(-2, -1)$  e  $(2, 1)$

# Exemplo 1 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = xy$  nos pontos

$$f(-2, -1) = (-2)(-1) = 2$$

$$f(2, -1) = 2(-1) = -2$$

$$f(-2, 1) = -2 \times 1 = -2$$

$$f(2, 1) = 2 \times 1 = 2$$

O valor máximo de  $f$  é 2 e ocorre nos pontos  $(-2, -1)$  e  $(2, 1)$

O valor mínimo de  $f$  é  $-2$  e ocorre nos pontos  $(-2, 1)$  e  $(2, -1)$

## Exemplo 2

Encontre os valores máximo e mínimo da função

$$f(x, y) = 3x + 4y$$

na circunferência

$$x^2 + y^2 = 1$$

## Exemplo 2 – Interpretação do Problema

Queremos encontrar os valores extremos da função

$$f(x, y) = 3x + 4y$$

## Exemplo 2 – Interpretação do Problema

Queremos encontrar os valores extremos da função

$$f(x, y) = 3x + 4y$$

sujeito a restrição

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

## Exemplo 2 – Interpretação do Problema

Queremos encontrar os valores extremos da função

$$f(x, y) = 3x + 4y$$

sujeito a restrição

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Para isso precisamos encontrar os valores  $x$ ,  $y$  e  $\lambda$  tais que

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad g(x, y) = 0$$

## Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de  $f$

## Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$$

## Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x + 4y)$$

## Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x + 4y) = 3$$

## Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x + 4y) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

## Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x + 4y) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x + 4y)$$

## Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x + 4y) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x + 4y) = 4$$

## Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x + 4y) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x + 4y) = 4$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x + 4y) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x + 4y) = 4$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

## Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x + 4y) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x + 4y) = 4$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x}$$

## Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x + 4y) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x + 4y) = 4$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 - 1)$$

## Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x + 4y) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x + 4y) = 4$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 - 1) = 2x$$

## Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x + 4y) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x + 4y) = 4$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 - 1) = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}$$

## Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x + 4y) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x + 4y) = 4$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 - 1) = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 - 1)$$

## Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x + 4y) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x + 4y) = 4$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 - 1) = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 - 1) = 2y$$

## Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x + 4y) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x + 4y) = 4$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 - 1) = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 - 1) = 2y$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

## Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x + 4y) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x + 4y) = 4$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 - 1) = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 - 1) = 2y$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

## Exemplo 2 – Sistema

A equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

## Exemplo 2 – Sistema

A equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

se torna

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

## Exemplo 2 – Sistema

A equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

se torna

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x\lambda = 3 \\ 2y\lambda = 4 \end{cases}$$

## Exemplo 2 – Sistema

A equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

se torna

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x\lambda = 3 \\ 2y\lambda = 4 \end{cases}$$

A equação

$$g(x, y) = 0$$

## Exemplo 2 – Sistema

A equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

se torna

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x\lambda = 3 \\ 2y\lambda = 4 \end{cases}$$

A equação

$$g(x, y) = 0$$

se torna

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

## Exemplo 2 – Sistema

A equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

se torna

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x\lambda = 3 \\ 2y\lambda = 4 \end{cases}$$

A equação

$$g(x, y) = 0$$

se torna

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

## Exemplo 2 – Sistema

A equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

se torna

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x\lambda = 3 \\ 2y\lambda = 4 \end{cases}$$

A equação

$$g(x, y) = 0$$

se torna

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

## Exemplo 2 – Solução

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x\lambda = 3 \\ 2y\lambda = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

## Exemplo 2 – Solução

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x\lambda = 3 \\ 2y\lambda = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Notando que  $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2\lambda} \\ y = \frac{2}{\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

## Exemplo 2 – Solução

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x\lambda = 3 \\ 2y\lambda = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Notando que  $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2\lambda} \\ y = \frac{2}{\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

## Exemplo 2 – Solução

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x\lambda = 3 \\ 2y\lambda = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 = 1$$

Notando que  $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2\lambda} \\ y = \frac{2}{\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

## Exemplo 2 – Solução

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x\lambda = 3 \\ 2y\lambda = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Notando que  $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2\lambda} \\ y = \frac{2}{\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 = 1$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1$$

## Exemplo 2 – Solução

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x\lambda = 3 \\ 2y\lambda = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Notando que  $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2\lambda} \\ y = \frac{2}{\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 = 1$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1$$

$$\frac{9 + 16}{4\lambda^2} = 1$$

## Exemplo 2 – Solução

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x\lambda = 3 \\ 2y\lambda = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Notando que  $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2\lambda} \\ y = \frac{2}{\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 = 1$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1$$

$$\frac{9 + 16}{4\lambda^2} = 1$$

$$4\lambda^2 = 25$$

## Exemplo 2 – Solução

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x\lambda = 3 \\ 2y\lambda = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Notando que  $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2\lambda} \\ y = \frac{2}{\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 = 1$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1$$

$$\frac{9 + 16}{4\lambda^2} = 1$$

$$4\lambda^2 = 25$$

$$\lambda = \pm \frac{5}{2}$$

## Exemplo 2 – Solução

Quando  $\lambda = \frac{5}{2}$

## Exemplo 2 – Solução

Quando  $\lambda = \frac{5}{2}$

$$x = \frac{3}{2\lambda}$$

## Exemplo 2 – Solução

Quando  $\lambda = \frac{5}{2}$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2^{5/2}}$$

## Exemplo 2 – Solução

Quando  $\lambda = \frac{5}{2}$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2^{5/2}} = \frac{3}{5}$$

## Exemplo 2 – Solução

$$\text{Quando } \lambda = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2^{5/2}} = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{2}{\lambda}$$

## Exemplo 2 – Solução

$$\text{Quando } \lambda = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2^{5/2}} = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{5/2}$$

## Exemplo 2 – Solução

Quando  $\lambda = \frac{5}{2}$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2^{5/2}} = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{5/2} = \frac{4}{5}$$

## Exemplo 2 – Solução

Quando  $\lambda = \frac{5}{2}$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2^{5/2}} = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{5/2} = \frac{4}{5}$$

Quando  $\lambda = -5/2$

## Exemplo 2 – Solução

Quando  $\lambda = \frac{5}{2}$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2^{5/2}} = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{5/2} = \frac{4}{5}$$

Quando  $\lambda = -5/2$

$$x = \frac{3}{2\lambda}$$

## Exemplo 2 – Solução

Quando  $\lambda = \frac{5}{2}$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2^{5/2}} = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{5/2} = \frac{4}{5}$$

Quando  $\lambda = -5/2$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = -\frac{3}{2^{5/2}}$$

## Exemplo 2 – Solução

Quando  $\lambda = \frac{5}{2}$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2^{5/2}} = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{5/2} = \frac{4}{5}$$

Quando  $\lambda = -5/2$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = -\frac{3}{2^{5/2}} = -\frac{3}{5}$$

## Exemplo 2 – Solução

Quando  $\lambda = \frac{5}{2}$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2^{5/2}} = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{5/2} = \frac{4}{5}$$

Quando  $\lambda = -5/2$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = -\frac{3}{2^{5/2}} = -\frac{3}{5}$$

$$y = \frac{2}{\lambda}$$

## Exemplo 2 – Solução

Quando  $\lambda = \frac{5}{2}$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2^{5/2}} = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{5/2} = \frac{4}{5}$$

Quando  $\lambda = -5/2$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = -\frac{3}{2^{5/2}} = -\frac{3}{5}$$

$$y = \frac{2}{\lambda} = -\frac{2}{5/2}$$

## Exemplo 2 – Solução

Quando  $\lambda = \frac{5}{2}$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2^{5/2}} = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{5/2} = \frac{4}{5}$$

Quando  $\lambda = -5/2$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = -\frac{3}{2^{5/2}} = -\frac{3}{5}$$

$$y = \frac{2}{\lambda} = -\frac{2}{5/2} = -\frac{4}{5}$$

## Exemplo 2 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = 3x + 4y$  nos pontos

## Exemplo 2 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = 3x + 4y$  nos pontos

$$f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) =$$

## Exemplo 2 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = 3x + 4y$  nos pontos

$$f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) =$$

## Exemplo 2 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = 3x + 4y$  nos pontos

$$f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-9 - 16}{5} =$$

## Exemplo 2 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = 3x + 4y$  nos pontos

$$f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-9 - 16}{5} = -5$$

## Exemplo 2 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = 3x + 4y$  nos pontos

$$f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-9 - 16}{5} = -5$$

$$f\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) =$$

## Exemplo 2 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = 3x + 4y$  nos pontos

$$f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-9 - 16}{5} = -5$$

$$f\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 3\frac{3}{5} + 4\frac{4}{5} =$$

## Exemplo 2 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = 3x + 4y$  nos pontos

$$f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-9 - 16}{5} = -5$$

$$f\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 3\frac{3}{5} + 4\frac{4}{5} = \frac{9 + 16}{5} =$$

## Exemplo 2 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = 3x + 4y$  nos pontos

$$f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-9 - 16}{5} = -5$$

$$f\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 3\frac{3}{5} + 4\frac{4}{5} = \frac{9 + 16}{5} = 5$$

## Exemplo 2 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = 3x + 4y$  nos pontos

$$f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-9 - 16}{5} = -5$$

$$f\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 3\frac{3}{5} + 4\frac{4}{5} = \frac{9 + 16}{5} = 5$$

O valor máximo de  $f$  é 5 e ocorre no ponto  $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

## Exemplo 2 – Solução

Avaliando a função  $f(x, y) = 3x + 4y$  nos pontos

$$f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-9 - 16}{5} = -5$$

$$f\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 3\frac{3}{5} + 4\frac{4}{5} = \frac{9 + 16}{5} = 5$$

O valor máximo de  $f$  é 5 e ocorre no ponto  $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

O valor mínimo de  $f$  é  $-5$  e ocorre no ponto  $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

# Conteúdo

Extremos Condicionados

Extremos Locais Restritos a uma Curva

Multiplicadores de Lagrange

Exemplos

**Funções Crescentes**

Exemplos

Lista Mínima

# Funções Crescentes

Se  $h(x)$  é uma função real **crescente**

# Funções Crescentes

Se  $h(x)$  é uma função real **crescente** e  $f(x) = h(g(x))$

# Funções Crescentes

Se  $h(x)$  é uma função real **crescente** e  $f(x) = h(g(x))$   
os máximos (mínimos) de  $f$  coincidem com os máximos (mínimos) de  $g$

# Funções Crescentes

Se  $h(x)$  é uma função real crescente e  $f(x) = h(g(x))$   
os máximos (mínimos) de  $f$  coincidem com os máximos (mínimos) de  $g$

Se  $g$  tem máximo (mínimo) em  $a$ ,  $f$  também tem máximo (mínimo) em  $a$

# Funções Crescentes

Se  $h(x)$  é uma função real **crescente** e  $f(x) = h(g(x))$   
os máximos (mínimos) de  $f$  coincidem com os máximos (mínimos) de  $g$

Se  $g$  tem máximo (mínimo) em  $a$ ,  $f$  também tem máximo (mínimo) em  $a$

Note que o valor máximo (mínimo) **não é igual**

# Conteúdo

Extremos Condicionados

Extremos Locais Restritos a uma Curva

Multiplicadores de Lagrange

Exemplos

Funções Crescentes

**Exemplos**

Lista Mínima

## Exemplo 3

Encontre o ponto da superfície  $z = xy + 1$  que está mais próximo da origem

## Exemplo 3 – Formulação do Problema

Queremos minimizar a distância até a origem

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

## Exemplo 3 – Formulação do Problema

Queremos minimizar a distância até a origem

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Como a função raiz quadrada é crescente, podemos minimizar a função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

## Exemplo 3 – Formulação do Problema

Queremos minimizar a distância até a origem

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Como a função raiz quadrada é crescente, podemos minimizar a função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sujeito a restrição

$$g(x, y, z) = z - xy = 1$$

## Exemplo 3 – Gradientes

Gradiente de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

## Exemplo 3 – Gradientes

Gradiente de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$f_x(x, y, z) = 2x$$

## Exemplo 3 – Gradientes

Gradiente de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$f_x(x, y, z) = 2x$$

$$f_y(x, y, z) = 2y$$

## Exemplo 3 – Gradientes

Gradiente de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$f_x(x, y, z) = 2x$$

$$f_y(x, y, z) = 2y$$

$$f_z(x, y, z) = 2z$$

## Exemplo 3 – Gradientes

Gradiente de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$f_x(x, y, z) = 2x$$

$$f_y(x, y, z) = 2y$$

$$f_z(x, y, z) = 2z$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

## Exemplo 3 – Gradientes

Gradiente de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$f_x(x, y, z) = 2x$$

$$f_y(x, y, z) = 2y$$

$$f_z(x, y, z) = 2z$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g(x, y, z) = z - xy$

## Exemplo 3 – Gradientes

Gradiente de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$f_x(x, y, z) = 2x$$

$$f_y(x, y, z) = 2y$$

$$f_z(x, y, z) = 2z$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g(x, y, z) = z - xy$

$$g_x(x, y, z) = -y$$

## Exemplo 3 – Gradientes

Gradiente de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$f_x(x, y, z) = 2x$$

$$f_y(x, y, z) = 2y$$

$$f_z(x, y, z) = 2z$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g(x, y, z) = z - xy$

$$g_x(x, y, z) = -y$$

$$g_y(x, y, z) = -x$$

## Exemplo 3 – Gradientes

Gradiente de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$f_x(x, y, z) = 2x$$

$$f_y(x, y, z) = 2y$$

$$f_z(x, y, z) = 2z$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g(x, y, z) = z - xy$

$$g_x(x, y, z) = -y$$

$$g_y(x, y, z) = -x$$

$$g_z(x, y, z) = 1$$

## Exemplo 3 – Gradientes

Gradiente de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$f_x(x, y, z) = 2x$$

$$f_y(x, y, z) = 2y$$

$$f_z(x, y, z) = 2z$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g(x, y, z) = z - xy$

$$g_x(x, y, z) = -y$$

$$g_y(x, y, z) = -x$$

$$g_z(x, y, z) = 1$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Exemplo 3 – Sistema

Aplicando os Multiplicadores de Lagrange, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x = -\lambda y \\ 2y = -\lambda x \\ 2z = \lambda \\ z - xy = 1 \end{cases}$$

## Exemplo 3 – Solução

Isolamos  $x$  na primeira equação e substituímos na segunda

## Exemplo 3 – Solução

Isolamos  $x$  na primeira equação e substituímos na segunda

$$2x = -\lambda y$$

## Exemplo 3 – Solução

Isolamos  $x$  na primeira equação e substituímos na segunda

$$2x = -\lambda y$$

$$x = \frac{-\lambda y}{2}$$

## Exemplo 3 – Solução

Isolamos  $x$  na primeira equação e substituímos na segunda

$$2x = -\lambda y \qquad x = \frac{-\lambda y}{2}$$

$y$

## Exemplo 3 – Solução

Isolamos  $x$  na primeira equação e substituímos na segunda

$$2x = -\lambda y$$

$$x = \frac{-\lambda y}{2}$$

$$y = \frac{-\lambda}{2} x$$

## Exemplo 3 – Solução

Isolamos  $x$  na primeira equação e substituímos na segunda

$$2x = -\lambda y \qquad x = \frac{-\lambda y}{2}$$

$$y = \frac{-\lambda}{2}x = \frac{-\lambda}{2} \frac{-\lambda y}{2}$$

## Exemplo 3 – Solução

Isolamos  $x$  na primeira equação e substituímos na segunda

$$2x = -\lambda y$$

$$x = \frac{-\lambda y}{2}$$

$$y = \frac{-\lambda}{2}x = \frac{-\lambda}{2} \frac{-\lambda y}{2} = \frac{\lambda^2}{4}y$$

## Exemplo 3 – Solução

Isolamos  $x$  na primeira equação e substituímos na segunda

$$2x = -\lambda y$$

$$x = \frac{-\lambda y}{2}$$

$$y = \frac{-\lambda}{2}x = \frac{-\lambda}{2} \frac{-\lambda y}{2} = \frac{\lambda^2}{4}y$$

$$4y = \lambda^2 y$$

## Exemplo 3 – Solução

Isolamos  $x$  na primeira equação e substituímos na segunda

$$2x = -\lambda y \qquad x = \frac{-\lambda y}{2}$$

$$y = \frac{-\lambda}{2}x = \frac{-\lambda}{2} \frac{-\lambda y}{2} = \frac{\lambda^2}{4}y \qquad 4y = \lambda^2 y$$

Temos dois casos  $y = 0$  ou  $y \neq 0$

# Exemplo 3 – Caso 1

Caso  $y = 0$

## Exemplo 3 – Caso 1

Caso  $y = 0$

$$x = \frac{-\lambda y}{2}$$

## Exemplo 3 – Caso 1

Caso  $y = 0$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = 0$$

## Exemplo 3 – Caso 1

Caso  $y = 0$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = 0$$

$z - xy = 1$  se reduz a  $z = 1$

## Exemplo 3 – Caso 1

Caso  $y = 0$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = 0$$

$z - xy = 1$  se reduz a  $z = 1$

Obtemos o ponto  $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 1)$

## Exemplo 3 – Caso 2

Caso  $y \neq 0$

## Exemplo 3 – Caso 2

Caso  $y \neq 0$

$$4y = \lambda^2 y$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Caso  $y \neq 0$

$$4y = \lambda^2 y$$

$$\lambda^2 = 4$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Caso  $y \neq 0$

$$4y = \lambda^2 y$$

$$\lambda^2 = 4$$

$$\lambda = \pm 2$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = 2$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = 2$

$x$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = 2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2}$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = 2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2y}{2}$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = 2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2y}{2} = -y$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = 2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2y}{2} = -y$$

$$2z = \lambda$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = 2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2y}{2} = -y$$

$$2z = \lambda = 2$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = 2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2y}{2} = -y$$

$$2z = \lambda = 2$$

$$z = 1$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = 2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2y}{2} = -y$$

$$2z = \lambda = 2$$

$$z = 1$$

Substituindo na quarta equação

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = 2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2y}{2} = -y$$

$$2z = \lambda = 2$$

$$z = 1$$

Substituindo na quarta equação

$$z - xy = 1$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = 2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2y}{2} = -y$$

$$2z = \lambda = 2$$

$$z = 1$$

Substituindo na quarta equação

$$z - xy = 1$$

$$1 - (-y)y = 1$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = 2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2y}{2} = -y$$

$$2z = \lambda = 2$$

$$z = 1$$

Substituindo na quarta equação

$$z - xy = 1$$

$$1 - (-y)y = 1$$

$$y^2 = 0$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = 2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2y}{2} = -y$$

$$2z = \lambda = 2$$

$$z = 1$$

Substituindo na quarta equação

$$z - xy = 1$$

$$1 - (-y)y = 1$$

$$y^2 = 0$$

$$y = 0$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = 2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2y}{2} = -y$$

$$2z = \lambda = 2$$

$$z = 1$$

Substituindo na quarta equação

$$z - xy = 1$$

$$1 - (-y)y = 1$$

$$y^2 = 0$$

$$y = 0$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = 2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2y}{2} = -y$$

$$2z = \lambda = 2$$

$$z = 1$$

Substituindo na quarta equação

$$z - xy = 1$$

$$1 - (-y)y = 1$$

$$y^2 = 0$$

$$y = 0$$

Contradição

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = -2$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = -2$

$x$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = -2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2}$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = -2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-(-2)y}{2}$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = -2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-(-2)y}{2} = y$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = -2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-(-2)y}{2} = y$$

$$2z = \lambda = -2$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = -2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-(-2)y}{2} = y$$

$$2z = \lambda = -2$$

$$z = -1$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = -2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-(-2)y}{2} = y$$

$$2z = \lambda = -2$$

$$z = -1$$

Substituindo na quarta equação

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = -2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-(-2)y}{2} = y$$

$$2z = \lambda = -2$$

$$z = -1$$

Substituindo na quarta equação

$$z - xy = 1$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = -2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-(-2)y}{2} = y$$

$$2z = \lambda = -2$$

$$z = -1$$

Substituindo na quarta equação

$$z - xy = 1$$

$$-1 - y^2 = 1$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = -2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-(-2)y}{2} = y$$

$$2z = \lambda = -2$$

$$z = -1$$

Substituindo na quarta equação

$$z - xy = 1$$

$$-1 - y^2 = 1$$

$$-y^2 = 2$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = -2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-(-2)y}{2} = y$$

$$2z = \lambda = -2$$

$$z = -1$$

Substituindo na quarta equação

$$z - xy = 1$$

$$-1 - y^2 = 1$$

$$-y^2 = 2$$

$$y^2 = -2$$

## Exemplo 3 – Caso 2

Se  $y \neq 0$  e  $\lambda = -2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-(-2)y}{2} = y$$

$$2z = \lambda = -2$$

$$z = -1$$

Substituindo na quarta equação

$$z - xy = 1$$

$$-1 - y^2 = 1$$

$$-y^2 = 2$$

$$y^2 = -2$$

Não existe solução

## Exemplo 3 – Solução

O ponto mais próximo da origem é  $(0, 0, 1)$

## Exemplo 4

Encontre o ponto do plano  $x + 2y + 3z = 13$  mais próximo do ponto  $(1, 1, 1)$

## Exemplo 4 – Formulação do Problema

Queremos minimizar a distância

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2}$$

## Exemplo 4 – Formulação do Problema

Queremos minimizar a distância

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$$

Como a função raiz quadrada é crescente podemos minimizar a função

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

## Exemplo 4 – Formulação do Problema

Queremos minimizar a distância

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$$

Como a função raiz quadrada é crescente podemos minimizar a função

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

Sujeito a condição

$$g(x, y, z) = x + 2y + 3z = 13$$

## Exemplo 4 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$$

## Exemplo 4 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x-1)$$

## Exemplo 4 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x-1)$$

$$f_y(x, y, z) = 2(y-1)$$

## Exemplo 4 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x-1)$$

$$f_y(x, y, z) = 2(y-1)$$

$$f_z(x, y, z) = 2(z-1)$$

## Exemplo 4 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x-1)$$

$$f_y(x, y, z) = 2(y-1)$$

$$f_z(x, y, z) = 2(z-1)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 2(z-1) \end{pmatrix}$$

## Exemplo 4 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \qquad g(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x-1)$$

$$f_y(x, y, z) = 2(y-1)$$

$$f_z(x, y, z) = 2(z-1)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 2(z-1) \end{pmatrix}$$

## Exemplo 4 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$g(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x-1)$$

$$g_x(x, y, z) = 1$$

$$f_y(x, y, z) = 2(y-1)$$

$$f_z(x, y, z) = 2(z-1)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 2(z-1) \end{pmatrix}$$

## Exemplo 4 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$g(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x-1)$$

$$g_x(x, y, z) = 1$$

$$f_y(x, y, z) = 2(y-1)$$

$$g_y(x, y, z) = 2$$

$$f_z(x, y, z) = 2(z-1)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 2(z-1) \end{pmatrix}$$

## Exemplo 4 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x-1)$$

$$f_y(x, y, z) = 2(y-1)$$

$$f_z(x, y, z) = 2(z-1)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 2(z-1) \end{pmatrix}$$

$$g(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

$$g_x(x, y, z) = 1$$

$$g_y(x, y, z) = 2$$

$$g_z(x, y, z) = 3$$

## Exemplo 4 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x-1)$$

$$f_y(x, y, z) = 2(y-1)$$

$$f_z(x, y, z) = 2(z-1)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 2(z-1) \end{pmatrix}$$

$$g(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

$$g_x(x, y, z) = 1$$

$$g_y(x, y, z) = 2$$

$$g_z(x, y, z) = 3$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

## Exemplo 4 – Sistema

Aplicando os Multiplicadores de Lagrange, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2(x - 1) = \lambda \\ 2(y - 1) = 2\lambda \\ 2(z - 1) = 3\lambda \\ x + 2y + 3z = 13 \end{cases}$$

## Exemplo 4 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

## Exemplo 4 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = \lambda$$

## Exemplo 4 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = \lambda$$

$$x = \frac{\lambda}{2} + 1$$

## Exemplo 4 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = \lambda$$

$$2(y - 1) = 2\lambda$$

$$x = \frac{\lambda}{2} + 1$$

## Exemplo 4 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = \lambda$$

$$x = \frac{\lambda}{2} + 1$$

$$2(y - 1) = 2\lambda$$

$$y = \lambda + 1$$

## Exemplo 4 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = \lambda$$

$$x = \frac{\lambda}{2} + 1$$

$$2(y - 1) = 2\lambda$$

$$y = \lambda + 1$$

$$2(z - 1) = 3\lambda$$

## Exemplo 4 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = \lambda$$

$$x = \frac{\lambda}{2} + 1$$

$$2(y - 1) = 2\lambda$$

$$y = \lambda + 1$$

$$2(z - 1) = 3\lambda$$

$$z = \frac{3\lambda}{2} + 1$$

## Exemplo 4 – Solução

Substituindo na última equação

$$x + 2y + 3z = 13$$

## Exemplo 4 – Solução

Substituindo na última equação

$$x + 2y + 3z = 13$$

$$\left(\frac{\lambda}{2} + 1\right) + 2(\lambda + 1) + 3\left(\frac{3\lambda}{2} + 1\right) = 13$$

## Exemplo 4 – Solução

Substituindo na última equação

$$x + 2y + 3z = 13$$

$$\left(\frac{\lambda}{2} + 1\right) + 2(\lambda + 1) + 3\left(\frac{3\lambda}{2} + 1\right) = 13$$

$$\frac{\lambda}{2} + 1 + 2\lambda + 2 + \frac{9\lambda}{2} + 3 = 13$$

## Exemplo 4 – Solução

Substituindo na última equação

$$x + 2y + 3z = 13$$

$$\left(\frac{\lambda}{2} + 1\right) + 2(\lambda + 1) + 3\left(\frac{3\lambda}{2} + 1\right) = 13$$

$$\frac{\lambda}{2} + 1 + 2\lambda + 2 + \frac{9\lambda}{2} + 3 = 13$$

$$\lambda + 2 + 4\lambda + 4 + 9\lambda + 6 = 26$$

## Exemplo 4 – Solução

Substituindo na última equação

$$x + 2y + 3z = 13$$

$$\left(\frac{\lambda}{2} + 1\right) + 2(\lambda + 1) + 3\left(\frac{3\lambda}{2} + 1\right) = 13$$

$$\frac{\lambda}{2} + 1 + 2\lambda + 2 + \frac{9\lambda}{2} + 3 = 13$$

$$\lambda + 2 + 4\lambda + 4 + 9\lambda + 6 = 26$$

$$14\lambda + 12 = 26$$

## Exemplo 4 – Solução

Substituindo na última equação

$$x + 2y + 3z = 13$$

$$\left(\frac{\lambda}{2} + 1\right) + 2(\lambda + 1) + 3\left(\frac{3\lambda}{2} + 1\right) = 13$$

$$\frac{\lambda}{2} + 1 + 2\lambda + 2 + \frac{9\lambda}{2} + 3 = 13$$

$$\lambda + 2 + 4\lambda + 4 + 9\lambda + 6 = 26$$

$$14\lambda + 12 = 26$$

$$14\lambda = 14$$

## Exemplo 4 – Solução

Substituindo na última equação

$$x + 2y + 3z = 13$$

$$\left(\frac{\lambda}{2} + 1\right) + 2(\lambda + 1) + 3\left(\frac{3\lambda}{2} + 1\right) = 13$$

$$\frac{\lambda}{2} + 1 + 2\lambda + 2 + \frac{9\lambda}{2} + 3 = 13$$

$$\lambda + 2 + 4\lambda + 4 + 9\lambda + 6 = 26$$

$$14\lambda + 12 = 26$$

$$14\lambda = 14$$

$$\lambda = 1$$

## Exemplo 4 – Solução

Portanto

## Exemplo 4 – Solução

Portanto

$$x = \frac{\lambda}{2} + 1$$

## Exemplo 4 – Solução

Portanto

$$x = \frac{\lambda}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1$$

## Exemplo 4 – Solução

Portanto

$$x = \frac{\lambda}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

## Exemplo 4 – Solução

Portanto

$$x = \frac{\lambda}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$y = \lambda + 1$$

## Exemplo 4 – Solução

Portanto

$$x = \frac{\lambda}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$y = \lambda + 1 = 1 + 1$$

## Exemplo 4 – Solução

Portanto

$$x = \frac{\lambda}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$y = \lambda + 1 = 1 + 1 = 2$$

## Exemplo 4 – Solução

Portanto

$$x = \frac{\lambda}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$y = \lambda + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$z = \frac{3\lambda}{2} + 1$$

## Exemplo 4 – Solução

Portanto

$$x = \frac{\lambda}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$y = \lambda + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$z = \frac{3\lambda}{2} + 1 = \frac{3 \times 1}{2} + 1$$

## Exemplo 4 – Solução

Portanto

$$x = \frac{\lambda}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$y = \lambda + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$z = \frac{3\lambda}{2} + 1 = \frac{3 \times 1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

## Exemplo 4 – Solução

Portanto

$$x = \frac{\lambda}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$y = \lambda + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$z = \frac{3\lambda}{2} + 1 = \frac{3 \times 1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

O ponto mais próximo é o ponto  $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$

## Exemplo 5

Encontre o ponto da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  mais distante do ponto  $(1, -1, 1)$

## Exemplo 5 – Formulação do Problema

Queremos maximizar a distância

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2}$$

## Exemplo 5 – Formulação do Problema

Queremos maximizar a distância

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2}$$

Como a função raiz quadrada é crescente, podemos maximizar a função

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2$$

## Exemplo 5 – Formulação do Problema

Queremos maximizar a distância

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2}$$

Como a função raiz quadrada é crescente, podemos maximizar a função

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2$$

sujeito a restrição

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

## Exemplo 5 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2$$

## Exemplo 5 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x - 1)$$

## Exemplo 5 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x - 1)$$

$$f_y(x, y, z) = 2(y + 1)$$

## Exemplo 5 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x - 1)$$

$$f_y(x, y, z) = 2(y + 1)$$

$$f_z(x, y, z) = 2(z - 1)$$

## Exemplo 5 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x - 1)$$

$$f_y(x, y, z) = 2(y + 1)$$

$$f_z(x, y, z) = 2(z - 1)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x - 1) \\ 2(y + 1) \\ 2(z - 1) \end{pmatrix}$$

## Exemplo 5 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2$$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x - 1)$$

$$f_y(x, y, z) = 2(y + 1)$$

$$f_z(x, y, z) = 2(z - 1)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x - 1) \\ 2(y + 1) \\ 2(z - 1) \end{pmatrix}$$

## Exemplo 5 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x - 1)$$

$$f_y(x, y, z) = 2(y + 1)$$

$$f_z(x, y, z) = 2(z - 1)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x - 1) \\ 2(y + 1) \\ 2(z - 1) \end{pmatrix}$$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$g_x(x, y, z) = 2x$$

## Exemplo 5 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x - 1)$$

$$f_y(x, y, z) = 2(y + 1)$$

$$f_z(x, y, z) = 2(z - 1)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x - 1) \\ 2(y + 1) \\ 2(z - 1) \end{pmatrix}$$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$g_x(x, y, z) = 2x$$

$$g_y(x, y, z) = 2y$$

## Exemplo 5 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x - 1)$$

$$f_y(x, y, z) = 2(y + 1)$$

$$f_z(x, y, z) = 2(z - 1)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x - 1) \\ 2(y + 1) \\ 2(z - 1) \end{pmatrix}$$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$g_x(x, y, z) = 2x$$

$$g_y(x, y, z) = 2y$$

$$g_z(x, y, z) = 2z$$

## Exemplo 5 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x - 1)$$

$$f_y(x, y, z) = 2(y + 1)$$

$$f_z(x, y, z) = 2(z - 1)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x - 1) \\ 2(y + 1) \\ 2(z - 1) \end{pmatrix}$$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$g_x(x, y, z) = 2x$$

$$g_y(x, y, z) = 2y$$

$$g_z(x, y, z) = 2z$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

## Exemplo 5 – Sistema

Aplicando os Multiplicadores de Lagrange, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2(x - 1) = 2\lambda x \\ 2(y + 1) = 2\lambda y \\ 2(z - 1) = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

## Exemplo 5 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

## Exemplo 5 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = 2\lambda x$$

## Exemplo 5 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = 2\lambda x$$

$$x - 1 = \lambda x$$

## Exemplo 5 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = 2\lambda x$$

$$x - 1 = \lambda x$$

$$x(1 - \lambda) = 1$$

## Exemplo 5 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = 2\lambda x$$

$$x - 1 = \lambda x$$

$$x(1 - \lambda) = 1$$

$$x = \frac{1}{1 - \lambda}$$

## Exemplo 5 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = 2\lambda x$$

$$2(y + 1) = 2\lambda y$$

$$x - 1 = \lambda x$$

$$x(1 - \lambda) = 1$$

$$x = \frac{1}{1 - \lambda}$$

## Exemplo 5 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = 2\lambda x$$

$$x - 1 = \lambda x$$

$$x(1 - \lambda) = 1$$

$$x = \frac{1}{1 - \lambda}$$

$$2(y + 1) = 2\lambda y$$

$$y + 1 = \lambda y$$

## Exemplo 5 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = 2\lambda x$$

$$x - 1 = \lambda x$$

$$x(1 - \lambda) = 1$$

$$x = \frac{1}{1 - \lambda}$$

$$2(y + 1) = 2\lambda y$$

$$y + 1 = \lambda y$$

$$y(1 - \lambda) = -1$$

## Exemplo 5 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = 2\lambda x$$

$$x - 1 = \lambda x$$

$$x(1 - \lambda) = 1$$

$$x = \frac{1}{1 - \lambda}$$

$$2(y + 1) = 2\lambda y$$

$$y + 1 = \lambda y$$

$$y(1 - \lambda) = -1$$

$$y = \frac{-1}{1 - \lambda}$$

## Exemplo 5 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = 2\lambda x$$

$$x - 1 = \lambda x$$

$$x(1 - \lambda) = 1$$

$$x = \frac{1}{1 - \lambda}$$

$$2(y + 1) = 2\lambda y$$

$$y + 1 = \lambda y$$

$$y(1 - \lambda) = -1$$

$$y = \frac{-1}{1 - \lambda}$$

$$2(z - 1) = 2\lambda z$$

## Exemplo 5 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = 2\lambda x$$

$$x - 1 = \lambda x$$

$$x(1 - \lambda) = 1$$

$$x = \frac{1}{1 - \lambda}$$

$$2(y + 1) = 2\lambda y$$

$$y + 1 = \lambda y$$

$$y(1 - \lambda) = -1$$

$$y = \frac{-1}{1 - \lambda}$$

$$2(z - 1) = 2\lambda z$$

$$z - 1 = \lambda z$$

## Exemplo 5 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = 2\lambda x$$

$$x - 1 = \lambda x$$

$$x(1 - \lambda) = 1$$

$$x = \frac{1}{1 - \lambda}$$

$$2(y + 1) = 2\lambda y$$

$$y + 1 = \lambda y$$

$$y(1 - \lambda) = -1$$

$$y = \frac{-1}{1 - \lambda}$$

$$2(z - 1) = 2\lambda z$$

$$z - 1 = \lambda z$$

$$z(1 - \lambda) = 1$$

## Exemplo 5 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = 2\lambda x$$

$$x - 1 = \lambda x$$

$$x(1 - \lambda) = 1$$

$$x = \frac{1}{1 - \lambda}$$

$$2(y + 1) = 2\lambda y$$

$$y + 1 = \lambda y$$

$$y(1 - \lambda) = -1$$

$$y = \frac{-1}{1 - \lambda}$$

$$2(z - 1) = 2\lambda z$$

$$z - 1 = \lambda z$$

$$z(1 - \lambda) = 1$$

$$z = \frac{1}{1 - \lambda}$$

## Exemplo 5 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x - 1) = 2\lambda x$$

$$x - 1 = \lambda x$$

$$x(1 - \lambda) = 1$$

$$x = \frac{1}{1 - \lambda}$$

$$2(y + 1) = 2\lambda y$$

$$y + 1 = \lambda y$$

$$y(1 - \lambda) = -1$$

$$y = \frac{-1}{1 - \lambda}$$

$$2(z - 1) = 2\lambda z$$

$$z - 1 = \lambda z$$

$$z(1 - \lambda) = 1$$

$$z = \frac{1}{1 - \lambda}$$

Usamos que  $1 - \lambda \neq 0$  pois  $x(1 - \lambda) = 1$

## Exemplo 5 – Substituindo na Última Equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

## Exemplo 5 – Substituindo na Última Equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 = 4$$

## Exemplo 5 – Substituindo na Última Equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 = 4$$

$$\frac{1+1+1}{(1-\lambda)^2} = 4$$

## Exemplo 5 – Substituindo na Última Equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 = 4$$

$$\frac{1+1+1}{(1-\lambda)^2} = 4$$

$$\frac{1}{(1-\lambda)^2} = \frac{4}{3}$$

## Exemplo 5 – Substituindo na Última Equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 = 4$$

$$\frac{1+1+1}{(1-\lambda)^2} = 4$$

$$\frac{1}{(1-\lambda)^2} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{1-\lambda} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

## Exemplo 5 – Substituindo na Última Equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 = 4$$

$$\frac{1+1+1}{(1-\lambda)^2} = 4$$

$$\frac{1}{(1-\lambda)^2} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{1-\lambda} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

## Exemplo 5 – Solução

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

## Exemplo 5 – Solução

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda}$$

## Exemplo 5 – Solução

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

## Exemplo 5 – Solução

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{1-\lambda}$$

## Exemplo 5 – Solução

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

## Exemplo 5 – Solução

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{1}{1-\lambda}$$

## Exemplo 5 – Solução

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

## Exemplo 5 – Solução

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

## Exemplo 5 – Solução

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda}$$

## Exemplo 5 – Solução

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

## Exemplo 5 – Solução

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{1-\lambda}$$

## Exemplo 5 – Solução

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

## Exemplo 5 – Solução

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{1}{1-\lambda}$$

## Exemplo 5 – Solução

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

## Exemplo 5 – Candidatos a Máximo

Temos dois candidatos  $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$  e  $\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$

## Exemplo 5 – Avaliando a Função

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

## Exemplo 5 – Avaliando a Função

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2$$

## Exemplo 5 – Avaliando a Função

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 \end{aligned}$$

## Exemplo 5 – Avaliando a Função

$$\begin{aligned}f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 \\&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 \\&= 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2\end{aligned}$$

## Exemplo 5 – Avaliando a Função

$$f\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$$

## Exemplo 5 – Avaliando a Função

$$f\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2$$

## Exemplo 5 – Avaliando a Função

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right) &= \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 \end{aligned}$$

## Exemplo 5 – Avaliando a Função

$$\begin{aligned}f\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right) &= \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 \\&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 \\&= 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2\end{aligned}$$

## Exemplo 5 – Solução

Como

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2$$

é menor do que

$$f\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2$$

## Exemplo 5 – Solução

Como

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2$$

é menor do que

$$f\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2$$

O ponto mais distante é  $\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$

# Conteúdo

Extremos Condicionados

Extremos Locais Restritos a uma Curva

Multiplicadores de Lagrange

Exemplos

Funções Crescentes

Exemplos

**Lista Mínima**

# Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12<sup>a</sup> ed. – Seção 14.8

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 3, 5, 7, 12, 16, 18, 24 e 30

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações