

Fórmula de Euler

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/pages/cfvv1>

Conteúdo

Cálculo com Números Complexos

Funções de Números Complexos

Exponencial Complexa

Lista Mínima

Derivadas e Integrais

Quando derivamos ou integramos por uma variável real, $x \in \mathbb{R}$

Derivadas e Integrais

Quando derivamos ou integramos por uma variável real, $x \in \mathbb{R}$

- ▶ A constante i se comporta como uma **constante**

Derivadas e Integrais

Quando derivamos ou integramos por uma variável real, $x \in \mathbb{R}$

- ▶ A constante i se comporta como uma constante

Para derivar ou integrar por uma variável complexa

Derivadas e Integrais

Quando derivamos ou integramos por uma variável real, $x \in \mathbb{R}$

- ▶ A constante i se comporta como uma constante

Para derivar ou integrar por uma variável complexa

- ▶ Precisamos de uma nova teoria

Derivadas e Integrais

Quando derivamos ou integramos por uma variável real, $x \in \mathbb{R}$

- ▶ A constante i se comporta como uma constante

Para derivar ou integrar por uma variável complexa

- ▶ Precisamos de uma nova teoria – Variáveis Complexas

Conteúdo

Cálculo com Números Complexos

Funções de Números Complexos

Exponencial Complexa

Lista Mínima

Funções de Variáveis Complexas

Conhecemos as Séries de Taylor das funções em $\mathbb{R}$

Funções de Variáveis Complexas

Conhecemos as Séries de Taylor das funções em $\mathbb{R}$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Funções de Variáveis Complexas

Conhecemos as Séries de Taylor das funções em $\mathbb{R}$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\operatorname{cos} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Funções de Variáveis Complexas

Conhecemos as Séries de Taylor das funções em $\mathbb{R}$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Funções de Variáveis Complexas

Podemos estender as definições das funções para $\mathbb{C}$

Funções de Variáveis Complexas

Podemos estender a definições das funções para $\mathbb{C}$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

Funções de Variáveis Complexas

Podemos estender a definições das funções para $\mathbb{C}$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\operatorname{cos} z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

Funções de Variáveis Complexas

Podemos estender a definições das funções para $\mathbb{C}$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\operatorname{cos} z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

Conteúdo

Cálculo com Números Complexos

Funções de Números Complexos

Exponencial Complexa

Lista Mínima

Justificativa

Escolhendo $z = i\theta$

$$e^{i\theta}$$

Justificativa

Escolhendo $z = i\theta$

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \dots$$

Justificativa

Escolhendo $z = i\theta$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \dots \\ &= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Justificativa

Escolhendo $z = i\theta$

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

Justificativa

Escolhendo $z = i\theta$

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

Justificativa

Escolhendo $z = i\theta$

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= \cos \theta + i \sin \theta$$

Identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

Identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

“Todas as Constantes da Matemática”

$$e^{i\pi}$$

Identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

“Todas as Constantes da Matemática”

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi$$

Identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

“Todas as Constantes da Matemática”

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + i0$$

Identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

“Todas as Constantes da Matemática”

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i0 = -1$$

Identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

“Todas as Constantes da Matemática”

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i0 = -1$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Exponencial Complexa

$$e^z = e^{a+bi}$$

Exponencial Complexa

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi}$$

Exponencial Complexa

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a [\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)]$$

Exponencial Complexa

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a [\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)]$$

► e^a crescimento ou decrescimento

Exponencial Complexa

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a [\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)]$$

- ▶ e^a crescimento ou decrescimento
- ▶ $\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)$ oscilação

Conteúdo

Cálculo com Números Complexos

Funções de Números Complexos

Exponencial Complexa

Lista Mínima

Lista Mínima

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações