

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens, escreva ao menos uma, e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [20%] Calcule determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e determine se a matriz é invertível

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} + a_{14}(-1)^{1+4}M_{14} \\ &= 1M_{11} - 2M_{12} + 1M_{13} - 0M_{14} \\ &= M_{11} - 2M_{12} + M_{13} \end{aligned}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4 - 1) + (0 - 2) = 3 - 2 = 1$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(4 - 1) + (1 - 0) = 6 + 1 = 7$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 - 1(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(4 - 0) - (2 - 0) = -4 - 2 = -6$$

$$\det(A) = 1 - 2 \times 7 - 6 = -19$$

Como $\det(A) \neq 0$, A é invertível

2 [25%] Calcule a projeção ortogonal de $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ em $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times 2 + 2(-1) + (-1)3 = 2 - 2 - 3 = -3$$

$$\vec{s} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2^2 + (-1)^2 + 3^2 = 4 + 1 + 9 = 14$$

$$\text{proj}_{\vec{s}} \vec{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{\vec{s} \cdot \vec{s}} \vec{s} = \frac{-3}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{7} \\ \frac{3}{14} \\ \frac{-9}{14} \end{pmatrix}$$

3 [20%] Encontre o vetor unitário na direção e sentido de $\vec{\psi} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{\psi} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{\psi}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + (-8)^2 + 9^2} = \sqrt{1 + 64 + 81} = \sqrt{146}$$

$$\hat{\psi} = \frac{\vec{\psi}}{\|\vec{\psi}\|} = \frac{1}{\sqrt{146}} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{146}} \\ \frac{-8}{\sqrt{146}} \\ \frac{9}{\sqrt{146}} \end{pmatrix}$$

4 [20%] Calcule $\|(1, 2, 1) \times (2, -1, 3)\|$

$$\begin{aligned}\vec{\psi} &= (1, 2, 1) \times (2, -1, 3) \\&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\&= \vec{i}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{j}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\&= \vec{i}(6+1) - \vec{j}(3-2) + \vec{k}(-1-4) \\&= 7\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k} \\&= \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \|\vec{\psi}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{7^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{49 + 1 + 25} = \sqrt{75}\end{aligned}$$

5 [20%] calcule o produto misto dos vetores $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\&= 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \\&= 1(-3 - 0) - 2(6 - 1) \\&= -3 - 10 \\&= -13\end{aligned}$$