

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens, escreva ao menos uma, e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [20%] Calcule o produto misto entre $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\&= 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\&= 2(1 - 4) - (-1 - 6) + (2 + 3) \\&= -6 + 7 + 5 \\&= 6\end{aligned}$$

2 [20%] Determine o ângulo entre os vetores $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + 1(-2) + 2 \times 2 = 2 - 2 + 4 = 4$$

$$\|\vec{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\vec{w}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} = \frac{4}{9}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{4}{9}\right) \approx 1,11 \approx 63,61^\circ$$

3 [20%] Determine a norma do vetor $\vec{\psi} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\vec{\psi} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{\psi}\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + 11^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 121 + 4} = \sqrt{126}$$

4 [20%] Calcule determinante de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e determine se a matriz é invertível

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} + a_{14}(-1)^{1+4}M_{14} \\ &= 2M_{11} - 1M_{12} + 1M_{13} - 0M_{14} \\ &= 2M_{11} - M_{12} + M_{13} \end{aligned}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(4 - 1) + (0 - 2) = 6 - 2 = 4$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (4 - 1) + (1 - 0) = 3 + 1 = 4$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 1(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 1) - (1 - 0) = -1$$

$$\det(A) = 2 \times 4 - 4 + (-1) = 3$$

Como $\det(A) \neq 0$ A é invertível

5 [20%] Encontre o vetor unitário na direção e sentido de $\vec{p} \times \vec{q}$ com $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 \vec{\psi} &= \vec{p} \times \vec{q} \\
 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= \vec{i}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + \vec{j}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\
 &= \vec{i}(3-2) - \vec{j}(6+1) + \vec{k}(-4-1) \\
 &= \vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\|\vec{\psi}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + (-7)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 49 + 25} = \sqrt{75}$$

$$\hat{\psi} = \frac{\vec{\psi}}{\|\vec{\psi}\|} = \frac{1}{\sqrt{75}} \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{75}} \\ \frac{-7}{\sqrt{75}} \\ \frac{-5}{\sqrt{75}} \end{pmatrix}$$