GAAL – Prova 3 – Turma 4

26/10/2026

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens, escreva ao menos uma, e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [20%] Determine um vetor normal e uma equação do plano que passa pelos pontos $P = (3, 3, 1)$, $Q = (0, 3, 2)$ e $R = (1, 0, 1)$

Calculamos dois vetores contidos no plano

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, 3, 2) - (3, 3, 1) = (-3, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (1, 0, 1) - (3, 3, 1) = (-2, -3, 0)$$

Um vetor normal ao plano é dado pelo produto vetorial

$$\begin{aligned}\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= [0 \cdot 0 - 1 \cdot (-3)]\vec{i} - [-3 \cdot 0 - 1 \cdot (-2)]\vec{j} + [-3(-3) - 0(-2)]\vec{k} \\ &= (3, -2, -9)\end{aligned}$$

A equação do plano que passa por $P = (3, 3, 1)$ e tem vetor normal $\vec{n} = (3, -2, -9)$ é

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot (X - P) &= 0 \\ (3, -2, -9) \cdot (x - 3, y - 3, z - 1) &= 0 \\ 3(x - 3) - 2(y - 3) - 9(z - 1) &= 0 \\ 3x - 9 - 2y - 6 - 9z + 9 &= 0 \\ 3x - 2y - 9z &= 6\end{aligned}$$

2 [20%] Determine a posição relativa entre os planos e uma equação paramétrica da interseção

$$\pi_1 \colon x + y + z = 3 \qquad \pi_2 \colon 2x - y + z = 1$$

Os vetores normais $(1, 1, 1)$ e $(2, -1, 1)$ não são proporcionais.
Os planos se intersectam em uma reta. Fazendo $z = t$:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 - t \\ 2x - y &= 1 - t \\ 3x &= 4 - 2t \\ x &= \frac{4}{3} - \frac{2}{3}t \\ y &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3}t \end{aligned}$$

Assim,

$$(x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 0\right) + t\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$$

3 [20%] Determine o ângulo entre os vetores $\vec{v} = (-1, 3, 2)$ e $\vec{w} = (2, -2, 4)$.

$\vec{v} \cdot \vec{w} =$

$\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| =$

Logo

$\cos\theta =$

$\theta = \arccos()$

4 [20%] Verifique se os vetores $\vec{v}_1 = (1,0,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,1)$ e $\vec{w} = (2,3,5)$ são linearmente independentes.

Procuramos a,b tais que

$$a(1,0,1) + b(0,1,1) = (2,3,5)$$

Comparando coordenadas, $a = 2$, $b = 3$ e $a + b = 5$, que são compatíveis. Portanto,

$$\vec{w} = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$$

Para a independência, suponha $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 = \vec{0}$.
Então $(a,b,a+b) = (0,0,0)$, logo $a = b = 0$.
Os vetores são linearmente independentes.

5 [20%] Obtenha, por Gram–Schmidt, uma base ortonormal que gere o mesmo espaço que os vetores $\vec{v}_1 = (1,0,1)$ e $\vec{v}_2 = (1,0,0)$

Tome

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (1,1) \qquad \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

Agora,

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1 \\ &= (1,0) - \frac{1}{2}(1,1) \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Como $\|\vec{u}_2\| = 1/\sqrt{2}$,

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

A base ortonormal é $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.